

Objectius

En aquesta quinzena aprendreu a:

- Conèixer i interpretar les funcions i les diferents formes de presentar-les.
- Reconèixer el domini i el recorregut d'una funció.
- Determinar si una funció és contínua o discontinua.
- Trobar la taxa de variació i la taxa de variació mitja d'una funció en un interval.
- Determinar el creixement o decreixement d'una funció i trobar-ne els màxims i mínims.
- Reconèixer els punts d'inflexió.
- Comprovar la simetria d'algunes funcions respecte a l'origen i a l'eix OY.
- Reconèixer si una funció és periòdica.

1. Funcions reals.....pàg. 132

Concepte de funció
Gràfic d'una funció
Domini i recorregut
Funcions definides a trossos

2. Propietats de les funcions.....pàg. 136

Continuïtat i discontinuïtats
Periodicitat
Simetries

3. Taxa de variació i creixement.....pàg. 138

Taxa de variació
Creixement i decreixement
Màxims i mínims
Concavitat i punts d'inflexió

Exercicis per a practicar

Per a saber-ne més

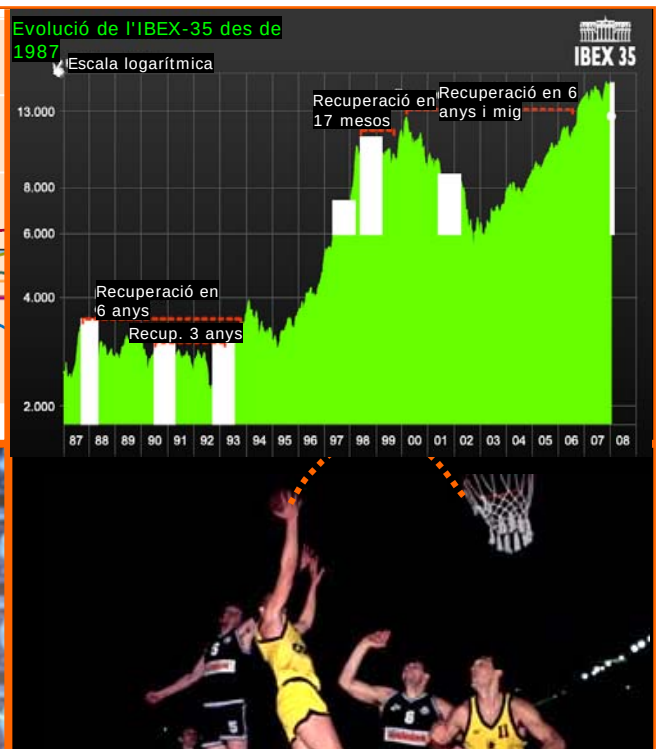
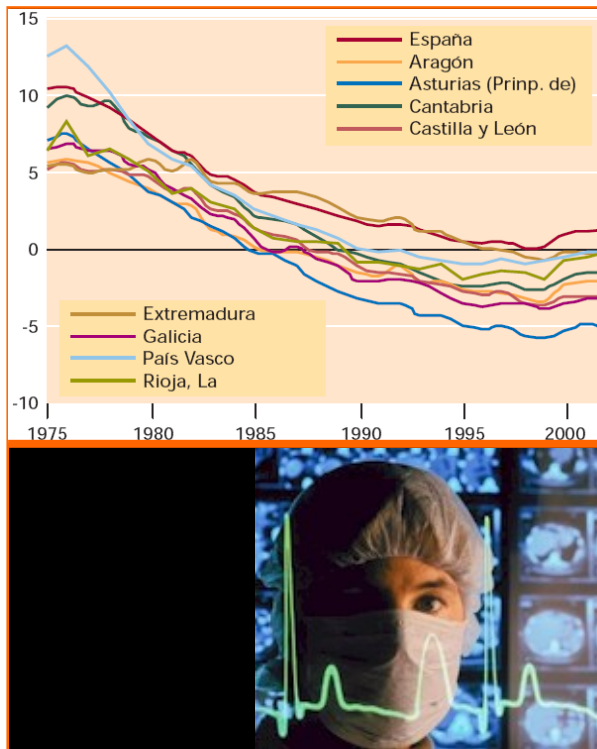
Resum

Autoavaluació

Activitats per a enviar al tutor

Abans de començar

El llenguatge de les gràfiques



De les diferents formes en les quals pot presentar-se una funció, mitjançant un enunciat, una taula, una expressió algebraica o una gràfica, aquesta última és la que ens permet veure amb només una ullada el seu comportament global, és per això que és tan important. En aquest tema aprendràs a reconèixer i interpretar-ne les característiques principals.



Investigueu

Imagineu-vos que pugeu en una sínia el radi de la qual mesura 30 m i per tal de pujar cal ascendir 5 m des del terra. La sínia comença a girar. Com és la gràfica de la funció que dona l'altura en la qual us trobeu segons l'angle de gir? Aneu a la cabina taronja i uns amics a la verda, com serà la seua gràfica?

Funcions i gràfiques

1. Funcions reals

Gràfic d'una funció

Una funció és una **correspondència** entre dos conjunts numèrics, de tal manera que a cada element del conjunt inicial li correspon **un element i només un** del conjunt final, la imatge.

Es relacionen així dues variables numèriques que solen designar-se amb **x** i **y**.

$$f: x \rightarrow y=f(x)$$

- ✓ x és la variable independent
- ✓ y és la variable dependent

$$f: \text{km recorreguts} \rightarrow \text{altitud en m}$$

km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882

Gràfica d'una funció

Per tal de veure el comportament d'una funció, **f:x** **y**, recorrem a la seua **representació gràfica** sobre els eixos cartesianes, en l'eix d'abscisses (OX) la variable independent i en el d'ordenades (OY) la dependent; les coordenades de cada punt de la gràfica són: **(x, f(x))**.

A la figura es troba representada la funció:

$$f(x) = 0,5x^2 + 3x + 3,5$$

Fent una taula de valors, es representen els punts obtinguts, x en l'eix d'abscisses (OX), f(x) en el d'ordenades (OY).

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	-4,5	0	3,5	6	7,5	8	7,5	6	3,5	0	-4,5

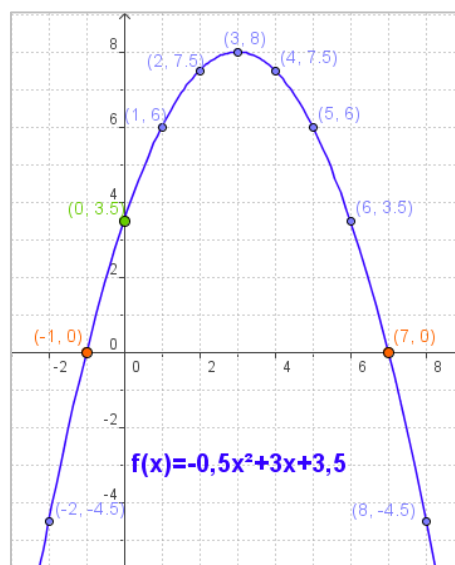
Hi ha uns punts que tenen interès especial, els que la gràfica talla amb els eixos coordenats. Per tal de calcular-los:

- ✓ Talleu amb l'eix OY:
Els punts de l'eix d'ordenades tenen abscissa 0, n'hi ha prou amb fer **x=0** en la fórmula de la funció.
- ✓ Talls amb l'eix OX:
Els punts de l'eix d'abscisses tenen y=0. Es resol l'equació **f(x)=0**.



El gràfic descriu el recorregut de la 9a Etapa de la Volta Ciclista 2007, indicant els km totals i l'altitud en els punts principals del trajecte.

A l'esquerra apareix la gràfica anterior traçada sobre uns eixos cartesianes, per tal de simplificar-la s'han unit els punts principals mitjançant segments. Es tracta d'una funció que dona l'altitud segons els km recorreguts, observeu la taula de valors.



Talls amb els eixos

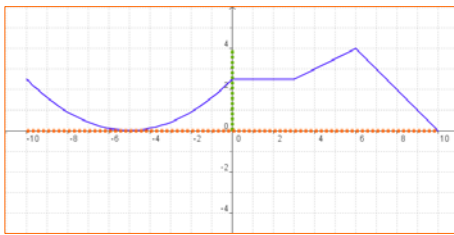
Eix OY: $f(0)=3,5$ punt (0, 3,5)

Eix OX: Resolent l'equació $0,5x^2 + 3x + 3,5 = 0$

Resulta:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+7}}{-2 \cdot 0,5} = 3 \pm 4 = \begin{matrix} 7 \\ -1 \end{matrix}$$

Punts (7, 0) (-1, 0)



Dom $f = [-10, 10]$

Calcular dominis

- Si l'expressió analítica de la funció és un polinomi, el domini són tots els nombres reals.

$$f(x) = -x^4 + 4x^2 + 1$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

$$\text{Im } f = (-\infty, 5]$$

- Si l'expressió analítica de la funció és un quocient, el domini són tots els reals excepte els que anul·len el denominador.

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{Im } f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

- Si l'expressió analítica de la funció és una arrel quadrada, el domini està format pels nombres reals per als quals el radicand és positiu o zero.

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

$$\text{Dom } f = [-3, +\infty)$$

$$\text{Im } f = [0, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$\text{Dom } f = (-2, +\infty)$$

$$\text{Im } f = (0, +\infty)$$

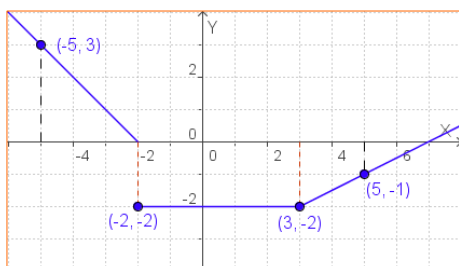
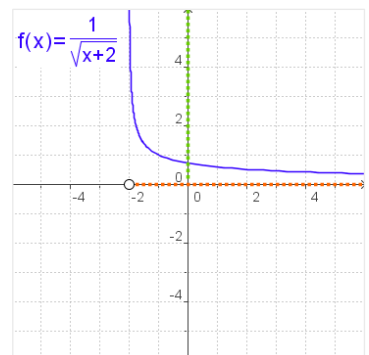
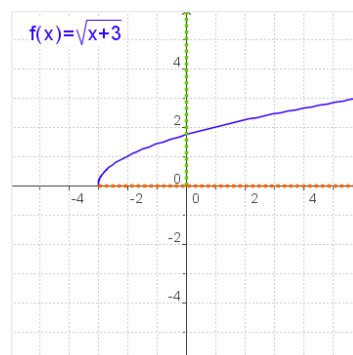
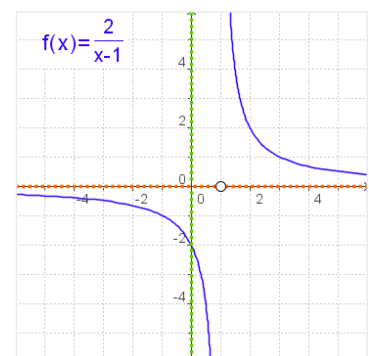
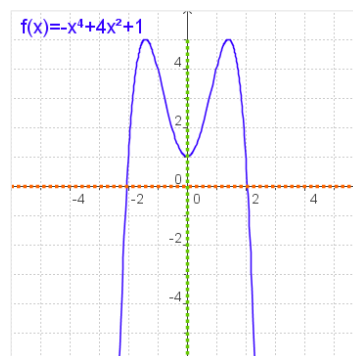
Domini i recorregut

Donada una funció $f: x \rightarrow y$

- ✓ S'anomena **domini** de f el conjunt de valors que pren la variable independent, x . S'indica com a **Dom f** .

El domini està format, per tant, pels valors de x per als quals existix la funció, és a dir, per als quals hi ha un $f(x)$.

- ✓ El **recorregut** és el conjunt de valors que pot prendre la variable dependent, y , això és el conjunt de les imatges. Es representa com a **Im f** .



$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & x < -2 \\ -2 & -2 \leq x \leq 3 \\ 0,5x-3,5 & x > 3 \end{cases}$$

Funcions definides a trossos

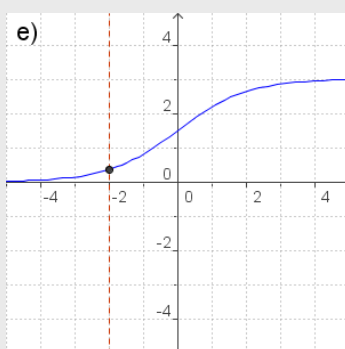
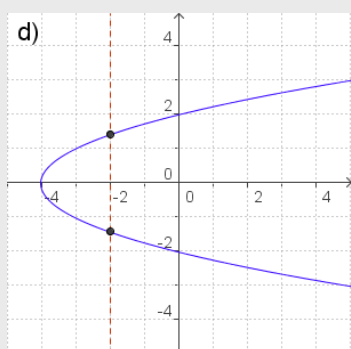
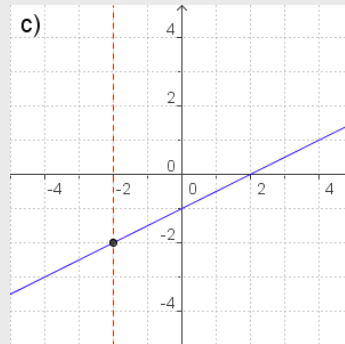
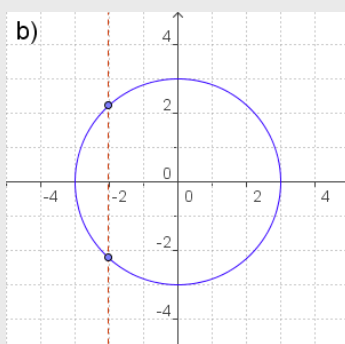
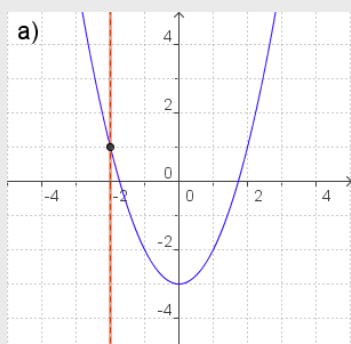
Hi ha un tipus de funcions que vénen definides amb diferents expressions algebraïques segons els valors de x , es diu que estan **definides a trossos**.

Per descriure analíticament una funció formada per trossos d'altres funcions, es donen les expressions dels diferents trams, per ordre d'esquerre a dreta, indicant en cada tram els valors de x per als quals la funció està definida.

A la figura podeu veure un exemple d'aquest tipus de funcions i la seua representació gràfica.

EXERCICIS resoltos

5. De les següents gràfiques indiqueu les que corresponen a una funció i les que no.

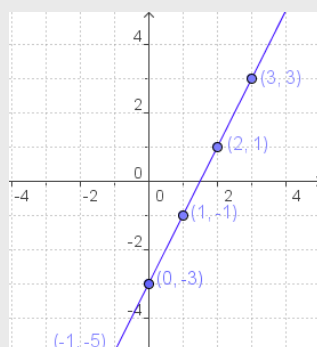


- Són gràfiques d'una funció a), c) i e), ja que a cada x del domini li correspon un únic valor de y .
- No són gràfiques d'una funció b) i d)

6. Feu una taula de valors, dibuixeu els punts obtinguts i representeu la funció

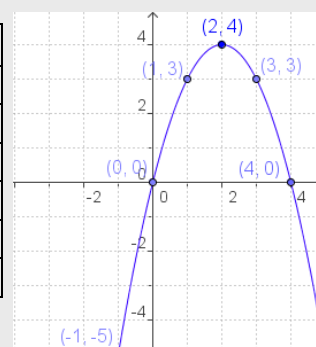
a) $f(x) = 2x - 3$

x	f(x)
0	-3
1	-1
2	1
3	3
-1	-5
-2	-7



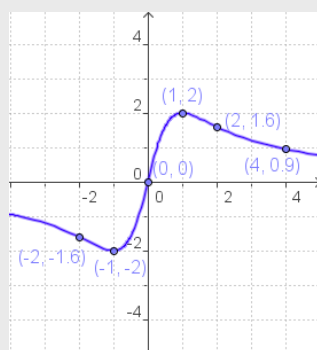
b) $f(x) = -x^2 + 4x$

x	f(x)
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0
-1	-5



c) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

x	f(x)
0	0
1	2
-1	-2
2	1,67
-2	-1,67
4	0,9



• **RECORDEU-HO:**

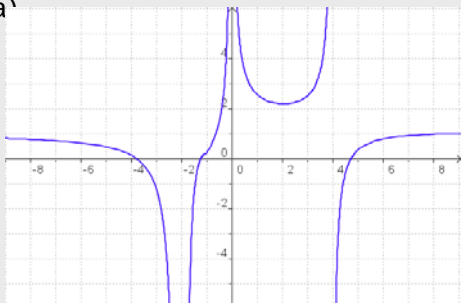
Per tal de fer una taula de valors, a partir de l'expressió d'una funció, substituïu en la fórmula la x pels valors que vulgueu, opereu i calculeu els corresponents de $y = f(x)$. En general procureu alternar valors positius i negatius.

Dibuixeu els punts (x, y) obtinguts d'aquesta manera, i uniu-los.

EXERCICIS resoltos

Calculeu el domini de les següents funcions

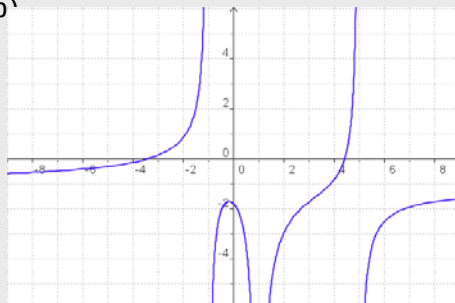
a`



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 0, 4\}$$

En els punts indicats, en ambdós casos, no es pot trobar $f(x)$ en la gràfica.

b`



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1, 5\}$$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$

Dom $f = \mathbb{R}$ ja que és un polinomi

d) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

e) $f(x) = \sqrt{x-5}$

$$x-5 \geq 0, x \geq 5 \Rightarrow \text{Dom } f = [5, +\infty)$$

f) $f(x) = \sqrt{5-x}$

$$5-x \geq 0, 5 \geq x \Rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 5]$$

g) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+4}}$

$$x+4 > 0, x > -4 \Rightarrow \text{Dom } f = (-4, +\infty)$$

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

$$2-x > 0, 2 > x \Rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 2)$$

(En aquests casos -4 i 2 , respectivament, no són del domini ja que anul·len el denominador)

3. En les següents funcions, definides a trossos, calculeu les imatges dels valors de x indicats.

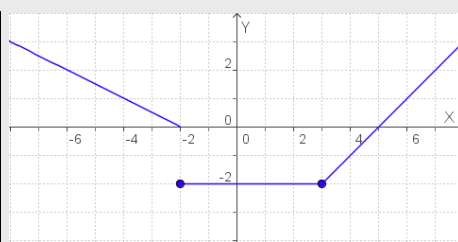
a) $f(x) = \begin{cases} -0,5x - 1 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$x = -4$ se substitueix dalt ($-4 < -2$)

$x = -2$, $x = 1$ i $x = 3$ se substitueixen en la del mig, ja que són a $[-2, 3]$.

$x = 6$ se substitueix baix, o siga que $6 > 3$

x	f(x)
-4	1
-2	-2
1	-2
3	-2
6	1



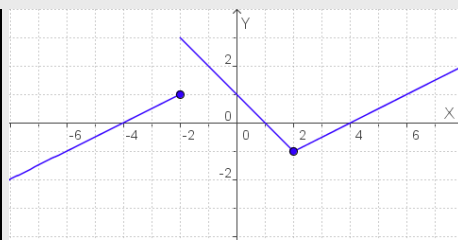
c) $f(x) = \begin{cases} 0,5x + 2 & \text{si } x \leq -2 \\ -x + 1 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 0,5x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$x = -6$, $x = -2$ se substitueix dalt.

$x = 0$ se substitueix en la del mig, ja que són a $-2 < 0 < 2$.

$x = 2$, $x = 4$ se substitueix baix.

x	f(x)
-6	-1
-2	3
0	1
2	-1
4	0



Funcions i gràfiques

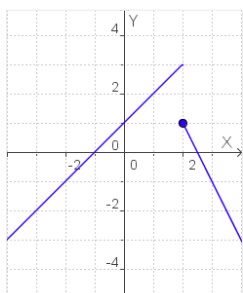
2. Propietats de les funcions

Continuïtat i discontinuïtats

La primera idea de funció **contínua** és la que es pot representar d'un sol traç, sense aixecar el llapis del paper.

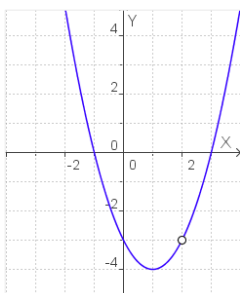
Quan una funció no és contínua en un punt es diu que presenta una **discontinuïtat**.

Les tres funcions dibuixades baix són discontinües en $x=2$, però tenen diferents tipus de discontinuïtat.



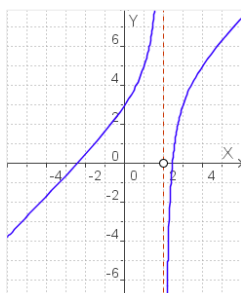
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 2 \\ -2x+5 & x \geq 2 \end{cases}$$
$$f(2)=1$$

La gràfica presenta un salt.



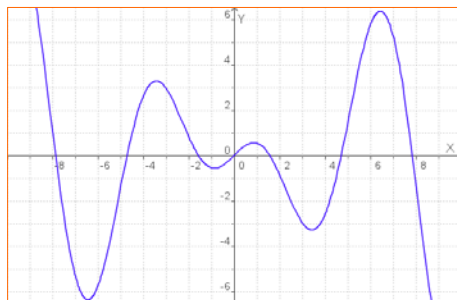
$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 6}{x - 2}$$

$x=2$ no pertany al domini. Aquesta discontinuïtat es diu "evitable".



$$f(x) = \frac{x^2 - 6}{x - 2}$$

$x=2$ no pertany al domini. La gràfica presenta un salt infinit.



Una funció $y=f(x)$ és contínua en $x=a$ si:

- La funció està definida en $x=a$, existix $f(a)=b$.
- Les imatges dels valors pròxims a a tendixen a b .

Hi ha diverses raons per les quals una funció no és contínua en un punt:

- Presenta un salt.
- La funció no està definida en aquest punt, o si ho està queda separat, hi ha un "forat" en la gràfica.
- La funció no està definida i el seu valor creix (o decreix) indefinidament quan ens apropem al punt.

Funcions periòdiques

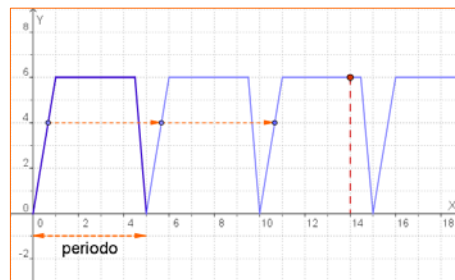
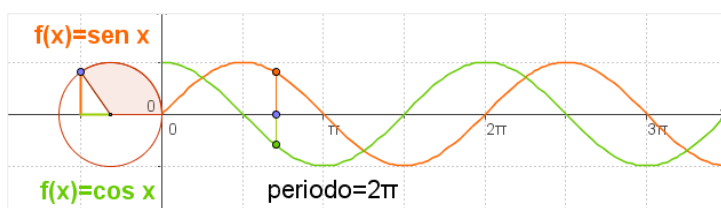
En la naturalesa i en el vostre entorn habitual hi ha fenòmens que es repetixen a intervals regulars, com el cas de les mares, els pèndols i ressorts, el so...

Les funcions que descriuen aquest tipus de fenòmens es diuen **periòdiques**.

Una **funció** és **periòdica** quan el seu valor es repetix cada vegada que la variable independent recorre un cert interval. El valor d'aquest interval s'anomena **període**.

$$f(x + \text{període}) = f(x)$$

Dues funcions periòdiques importants:



Una cisterna s'ompli i buida automàticament expulsant 6 litres d'aigua cada 5 minuts, seguint el ritme de la gràfica. Quan el dipòsit es troba buit comença l'ompliment, que costa 1 minut, està ple 3,5 minuts i es buida en 0,5 minuts. Aquest procés es repetix periòdicament.

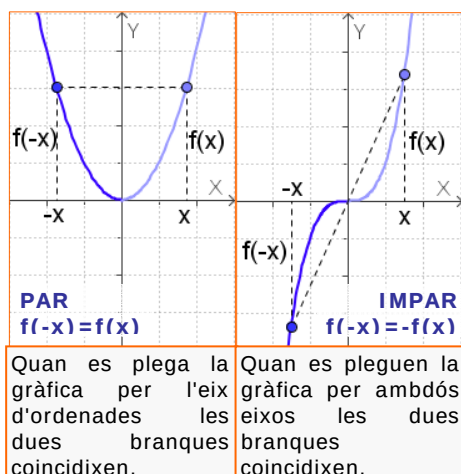
Per tal de conèixer el volum d'aigua en el dipòsit a cada instant conèixer el que ocorre en aquests primers 5 minuts. Així als 14 minuts, la quantitat d'aigua és:

$$f(14) = f(4 + 2 \cdot 5) = f(4) = 6$$

En dividir 14:5, quocient=2 residu=4

En general, si el període és 5:

$$f(x + 5 \cdot n) = f(x)$$



Simetries

La gràfica d'algunes funcions pot presentar algun tipus de simetria que si s'estudia prèviament, en facilita el dibuix.

- ✓ Una funció és **simètrica** respecte a l'eix OY, si $f(-x) = f(x)$.

En aquest cas la funció es diu **PARELLA**.

- ✓ Una funció és **simètrica** respecte a l'origen de coordenades quan $f(-x) = -f(x)$.

En aquest cas la funció s'anomena **SENAR**.

Observeu els gràfics per tal de reconèixer-los.

EXERCICIS resolt

5. Calculeu el valor de k perquè les següents funcions siguin contínues en el punt en què canvia la gràfica:

a) $f(x) = \begin{cases} 0,5x + k & x \leq 4 \\ x - 3 & x > 4 \end{cases}$

$f(4) = 0,5 \cdot 4 + k = 2 + k$

Si s'haguera definit en l'altre tram seria:

$f(4) = 4 - 3 = 1$

com que ambdós trams han de coincidir:

$2 + k = 1 \Rightarrow k = 1 - 2 = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} k & x \leq 1 \\ -x + 1 & x > 1 \end{cases}$

$f(1) = k$

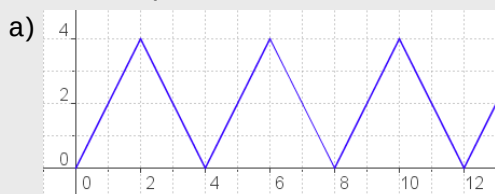
Si estiguera definida en l'altre tram seria:

$f(1) = -1 + 1 = 0$

com que ambdós trams han de coincidir:

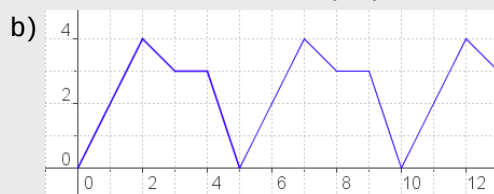
$k = 0$

6. Quin és el període de les funcions següents? En cada cas calculeu $f(45)$.



Període = 4

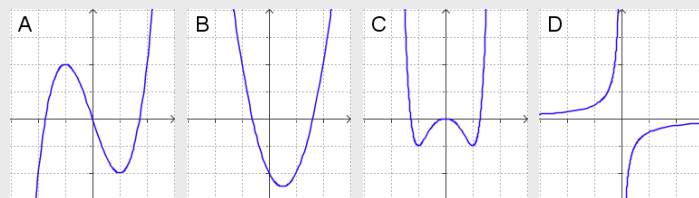
$45 = 4 \cdot 11 + 1 \quad f(45) = f(1) = 2$



Període = 5

$45 = 5 \cdot 9 \quad f(45) = f(0) = 0$

7. D'entre les següents gràfiques seleccioneu les que corresponen a funcions parelles i a funcions senars.



Parell: C

Senars: A i D

B no és parell ni senar

8. Les funcions següents (corresponents a les de l'exemple 7) són parelles o senars?

a) $f(x) = x^3 - 3x$

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$

SENARS

b) $f(x) = 2x^2 - 2x - 2$

$f(-x) = 2(-x)^2 - 2(-x) - 2 = 2x^2 + 2x - 2$

Ni PARELL ni SENAR

c) $f(x) = x^6 - x^4 - x^2$

$f(-x) = (-x)^6 - (-x)^4 - (-x)^2 = x^6 - x^4 - x^2 = f(x)$

PARELL

d) $f(x) = -1/x$

$f(-x) = -1/(-x) = 1/x = -f(x)$

SENAR

Funcions i gràfiques

3. Taxa de variació i creixement

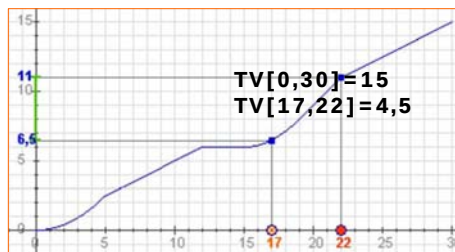
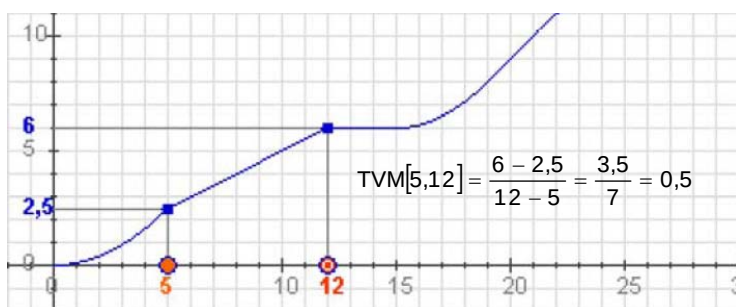
Taxa de variació d'una funció

La Taxa De **variació** o **increment** d'una funció és l'augment o disminució que experimenta una funció en passar la variable independent d'un valor a l'altre.

$$TV[x_1, x_2] = f(x_1) - f(x_2)$$

De més utilitat resulta calcular l'anomenada **taxa de variació mitjana**, que ens indica la variació relativa de la funció respecte a la variable independent:

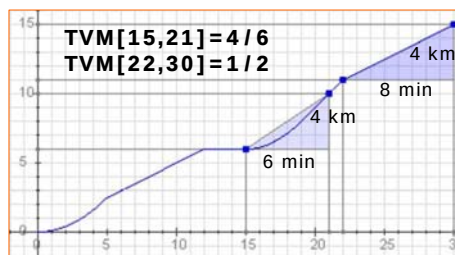
$$TVM[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



La gràfica representa la distància en km recorreguda d'un ciclista en funció del temps, en minuts, emprat.

La TV correspon en la distància recorreguda en un interval de temps.

La TVM és la velocitat mitjana en un interval de temps determinat.



Creixement i decreixement

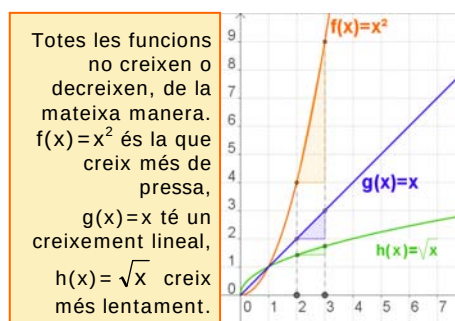
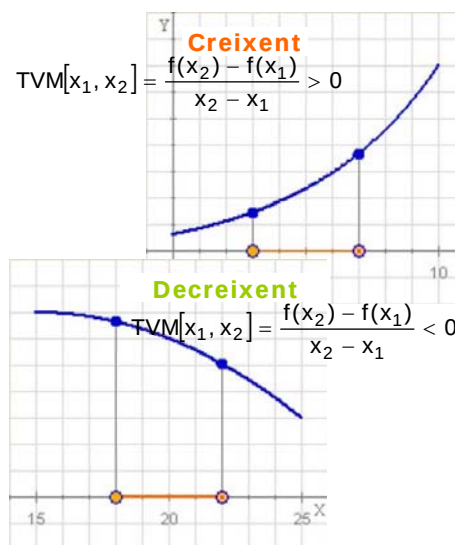
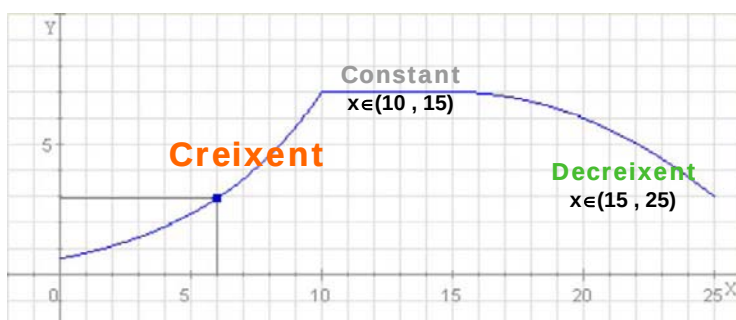
Una característica de les funcions que es pot visualitzar fàcilment en les gràfiques és la **monotonia**. Quan en augmentar el valor de x augmenta el valor de $y=f(x)$, la gràfica "ascendix" i es diu que la funció és **creixent**. Si al contrari en augmentar x disminueix y , la gràfica "descendix", i la funció **decreix**. Precisant un poc més:

Una **funció** és **creixent** en un interval, quan donats dos punts qualssevol d'aquest

- Si $x_1 < x_2$ aleshores $f(x_1) < f(x_2)$

I serà **decreixent**:

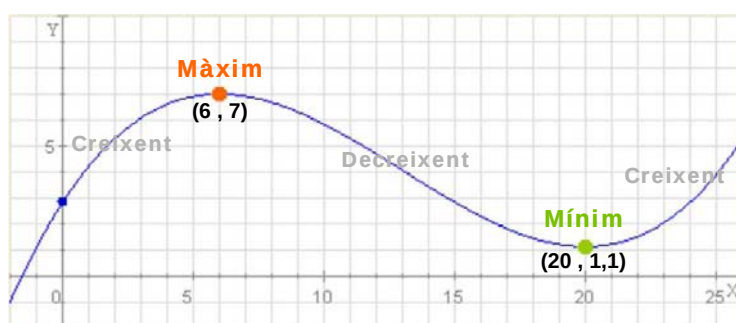
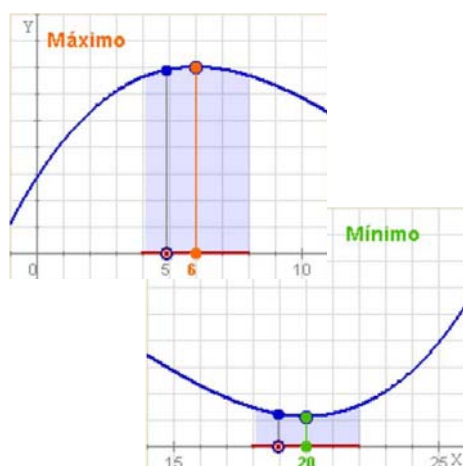
- Si $x_1 < x_2$ aleshores $f(x_1) > f(x_2)$



Màxims i mínims

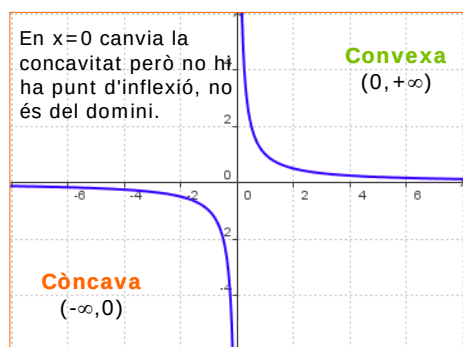
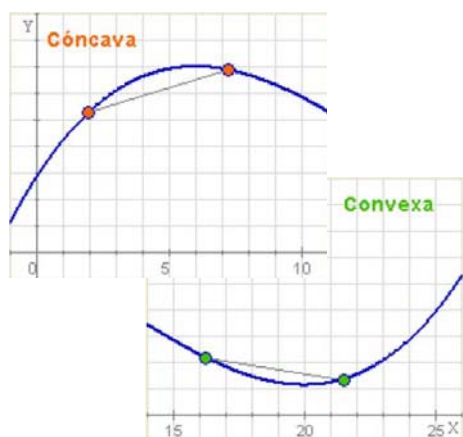
Donada una funció contínua en un punt $x=a$, es diu que presenta un **màxim relatiu**, si a l'esquerre del punt esmentat la funció és creixent i a la dreta la funció és decreixent.

Si, al contrari, la funció és creixent a la dreta i decreixent a l'esquerre hi ha un **mínim relatiu**.



Si es verifica que $f(a) > f(x)$ per a qualsevol valor x del domini, i no només per als valors "del voltant", es parla de **màxim absolut** en $x=a$.

I anàlogament es diu que a a hi ha un **mínim absolut** si $f(a) < f(x)$ per a qualsevol x del domini.

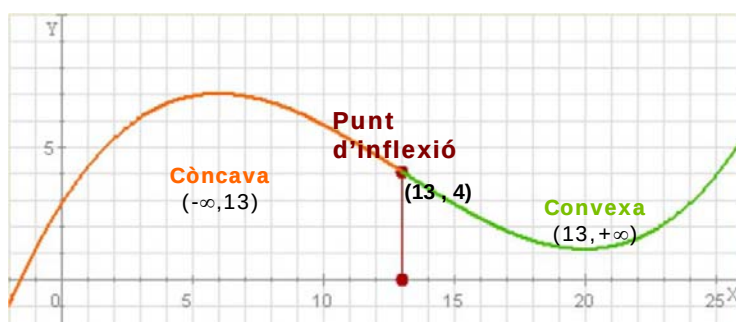


Concavitat, convexitat i punts d'inflexió

Una altra característica d'interés en les gràfiques de les funcions és la concavitat, estudiar els intervals en què la gràfica es corba cap avall o cap amunt.

- ✓ Una funció és **còncava** en un interval si el segment que unix dos punts qualssevol de la corba queda baix d'aquesta, i **convexa** si hi queda dalt.

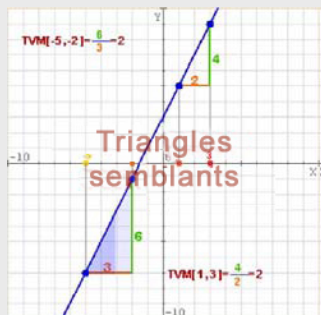
Els punts del domini en els quals la funció passa de còncava a convexa o viceversa, s'anomenen **punts d'inflexió**.



Funcions i gràfiques

EXERCICIS resoltos

9. Calculeu la taxa de variació mitja de les funcions següents entre els punts indicats. Comproveu a la figura que en les funcions el gràfic de les quals és una recta la TVM és constant.



a) $y = 2x + 3$

$$\text{TVM}[1, 3] = \frac{9 - 5}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

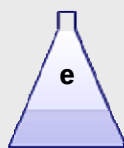
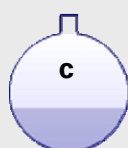
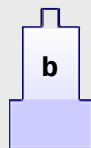
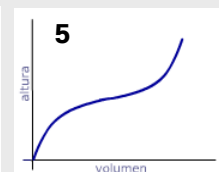
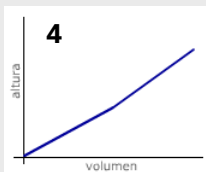
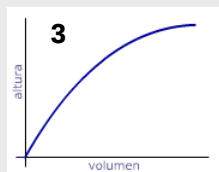
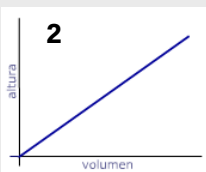
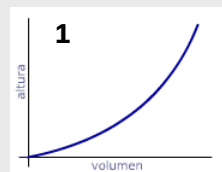
b) $y = 0,5x + 3$

$$\text{TVM}[1, 3] = \frac{4,5 - 3,5}{2} = 0,5$$

$$\text{TVM}[-5, -2] = \frac{-1 + 7}{-2 + 5} = \frac{6}{3} = 2$$

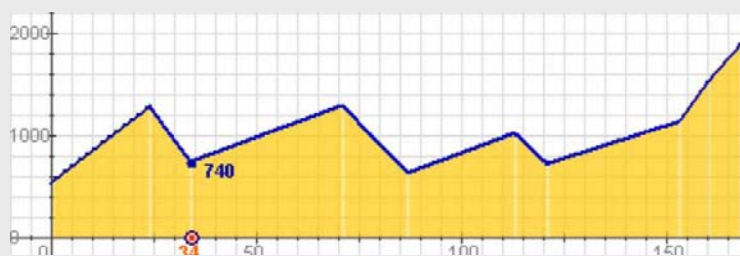
$$\text{TVM}[-3, 0] = \frac{3 - 1,5}{3} = 0,5$$

10. Las gràfiques representen l'ompliment dels diferents recipients, quina gràfica correspon a cada un?

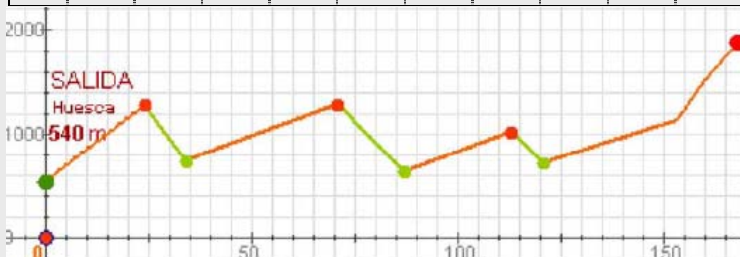


- a → 2
b → 4
c → 5
d → 3
e → 1

11. Recordeu la funció que donava el "perfil" d'una etapa de la Volta, que va veure al primer capítol, a) escriviu els intervals de creixement o decreixement; b) En quin punt quilomètric s'assoleixen els màxims relatius?, quin valor prenen?, i els mínims?; c) Hi ha absolut màxim o mínim?



km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882



- a)
Creixent:
(0, 24) U (34, 71) U (87, 113) U (121, 168)
Decreixent:
(24, 34) U (71, 87) U (113, 121)

- b)
MÀX: $x = 24, y = 1280$
 $x = 71, y = 1290$
 $x = 113, y = 1020$
MÍN: $x = 34, y = 740$
 $x = 87, y = 630$
 $x = 121, y = 720$

- c)
En aquest cas la funció té màxim i mínim absoluts, que s'assoleixen ambdós en els extrems del domini, com a mínim en $x = 0$ de valor 540 m, com a màxim en $x = 168$ de valor 1882.



Per a practicar

1. Considereu la funció que a cada nombre li assigna el seu quadrat menys 1. Escriviu la seua expressió analítica, calculeu les imatges -1, 1 y 2. Calculeu també els punts de tall amb els eixos.

2. Considereu la funció que a cada nombre li assigna la mitat més 3. Escriviu la seua expressió analítica, calculeu les imatges de -1, 1 y 3. Calculeu també els punts de tall amb els eixos.

3. Considereu la funció que a cada nombre li assigna el doble menys 5. Escriviu la seua expressió analítica, calculeu les imatges -2, -1 y 1. Calculeu també els punts de tall amb els eixos.

4. Calculeu el domini de les següents funcions:

a) $f(x) = -2x^2 + 5x - 6$

b) $f(x) = \frac{2x}{2x-4}$

c) $f(x) = \sqrt{-4x^2 + 12}$

d) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 20}$

e) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-4}}$

5. Estudieu la continuïtat de les següents funcions:

a) $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{-x}{x+3}$

6. Estudieu la continuïtat de les següents funcions en los puntos que se indica:

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases}$ en $x=1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$ en $x=0$

c) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & x \leq -1 \\ 4 & x > -1 \end{cases}$ en $x=-1$

d) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & x \leq -1 \\ 4 & x > -1 \end{cases}$ en $x=-1$

7. Estudieu la simetria de les funcions:

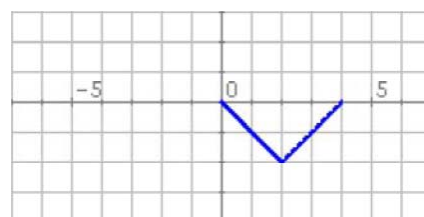
a) $f(x) = x^3 + 2x$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{5x^2}$

c) $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1}$ d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

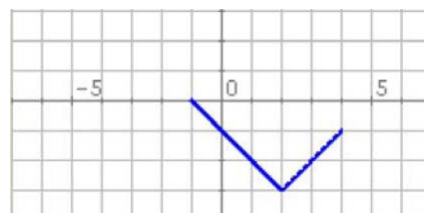
e) $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{2x}$ f) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 3$

8. En cada cas la gràfica mostra un tram o període d'una funció periòdica. Dibuixeu altres trams al teu quadern, trobeu el període i calculeu la imatge del punt d'abscissa que s'indica:

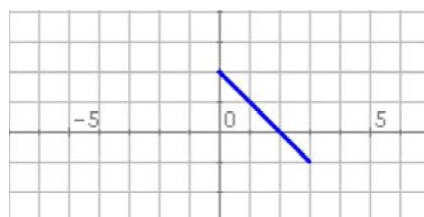
a) $f(-2)$



b) $f(-3)$

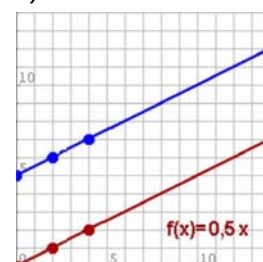


c) $f(-1)$

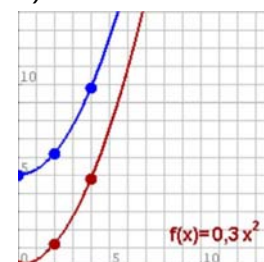


9. Calculeu les TVM de les funcions de la gràfica en els intervals $[0,4]$ y $[2,4]$.

a)

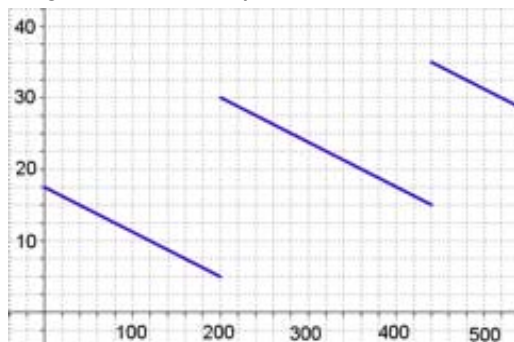


b)

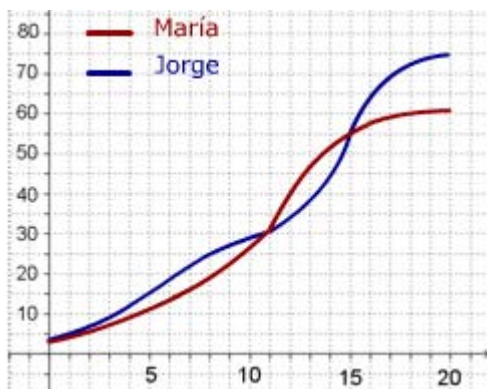


Funcions i gràfiques

10. El gràfic mostra com varia la gasolina que hi ha en el meu cotxe durant un viatge de 520 Km per una autovia.

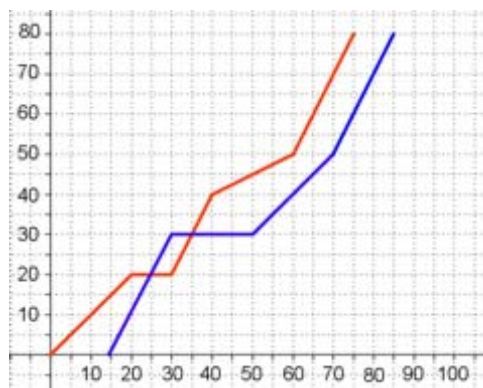


- Quanta gasolina hi ha al cap de 240 km? En el dipòsit, hi caben 40 litres, quan hi ha més de mig dipòsit ple?
 - En quantes gasolineres vaig parar?, a quina gasolinera vaig posar més gasolina? Si no em pare en cap, on em quede sense gasolina?
 - Quanta gasolina utilitze per als primers 200 km? Quanta n'utilitze per a tot el viatge? Quants litres consumix el meu cotxe cada 100 km en aquesta autovia?
11. La María en Jordi són dues persones més o menys típiques. En la gràfica podeu comparar com ha crescut el seu pes en els seus primers 20 anys. Quant pesava en Jordi als 8 anys?, i la Maria als 12? Quan va superar els 45 kg en Jordi? Fins quan va pesar menys de 45 kg la María?



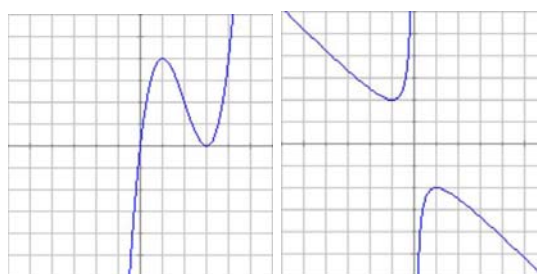
- ¿Cuánto pesaba Jorge a los 8 años?, ¿y María a los 12?. ¿Cuándo superó Jorge los 45 kg?
- A quina edat pesaven tots dos el mateix?. Quan pesava més en Jordi que la Maria? Quan pesava més la Maria que Jordi?
- Quin va ser l'augment de pes de tots dos entre els 11 i els 15 anys? Quina va ser la mitjana d'augment per any en el període anterior? En quin període de la seua vida la Maria va créixer més ràpidament?, i Jordi?

12. El gràfic dóna l'espai recorregut per dos cotxes que fan un mateix trajecte.



- Quina és la distància recorreguda? Si el primer cotxe ha eixit a las 10:00 h, a quina hora ha eixit el segon? Quant temps li ha costat a cada cotxe fer el recorregut?
 - Quant temps va estar parat cada cotxe? A quin km es van aturar? A quin km el segon cotxe avança el primer? A quin km el primer cotxe torna avançar el segon?
 - Quina és la velocitat mitjana de cada cotxe en el trajecte total? En quin interval de temps és més alta la velocitat de cada cotxe?
13. Les gràfiques següents corresponen a les funcions I y II.

I) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ II) $f(x) = -\frac{x^2 + 1}{x}$



Calculeu-ne de cada una:

- El domini.
- Els punts de tall amb els eixos.
- Els valors de x per als quals la funció és positiva i negativa.
- Els intervals de creixement i decreixement.
- Els màxims i mínims.
- Quants punts d'inflexió tenen?
- Els intervals de concavitat i convexitat.



La primera funció

El primer en construir una funció va ser **Galileu** (1564-1642). Des de dalt de la torre inclinada de Pisa va tirar dues boles, una de ferro i una altra de fusta i va comprovar que malgrat la diferència de pes, ambdues arribaven a terra alhora, havia descobert la llei de caiguda dels cossos.

Continuant el seu estudi i ocupant un **artefacte** curiós, va comprovar que l'espai recorregut depèn del quadrat del temps, i així va escriure la primera funció de la història. Fent clic **ací** podeu llegir més sobre el tema.

La primera definició formal de funció és gràcies a Euler, que en el llibre *Introductio in analysis infinitorum*, publicat el 1748, diu:

Una funció d'una quantitat variable és una expressió analítica composta de qualsevol manera a partir de la quantitat variable i de nombres o quantitats constants.

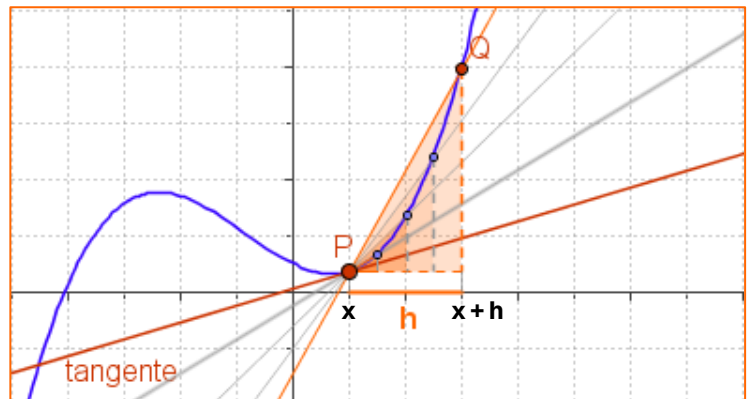
El 1755 en *Institutiones calculi differentialis*, torna a tractar el tema apropant-se més al que hui utilitzem.

Una funció curiosa

L'anomenada funció de Dirichlet, és la que a cada nombre real li assigna l'1 si és racional i el 0 si és irracional. És discontinua en tots els seus punts.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Tangent, taxa de Variació Mitjana i pendent

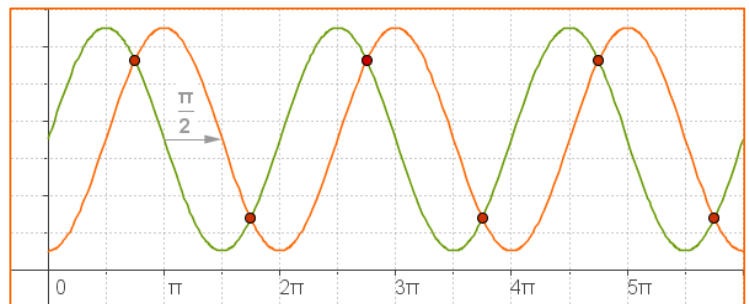
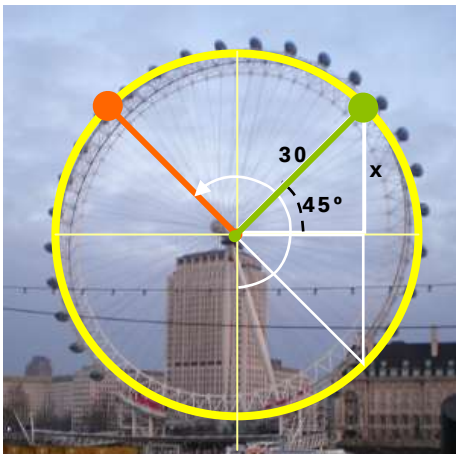


Quan el punt *PQ, la recta secant PQ tendix a la recta tangent a la corba $y=f(x)$ en P. La pendent de la secant és la TVM[P,Q] que tendix a la de la tangent.

És la derivada de la funció que

Estudiareu en cursos posteriors.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Observeu les dues gràfiques, ambdues funcions són periòdiques de període 2π , la gràfica verda està desfasada $\pi/2$ respecte a la taronja; fixeu-vos on assolixen els màxims i els mínims.

Quan coincideixen les dues gràfiques, a quina altura estan?

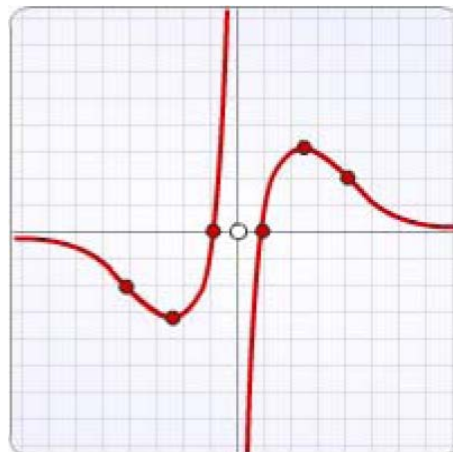
$x = r \cdot \sin 45^\circ = 21,21$ m; 1) $35 - 21,21 = 13,79$ 2) $35 + 21,21 = 56,21$

Funcions i gràfiques



Recordeu el més important

- ✓ Una **funció** és una relació entre dues variables **x** i **y**, de manera que a cada valor de la variable independent, **x**, se li associa un únic valor de la variable **y**, la dependent.
- ✓ El **domini** d'una funció és el conjunt de tots els possibles valors que pot prendre **x**.
- ✓ La **gràfica** d'una funció és el conjunt de punts **(x, f(x))** representats en el pla.
- ✓ Una funció és **contínua** si pot representar-se amb un sol traç. És **discontínua** en un punt si presenta un "salt" o no està definida en aquest punt.
- ✓ Una funció és **periòdica** de període **t**, si la seua gràfica es repeteix cada **t** unitats, **f(x+t)=f(x)**.
- ✓ Una funció és **simètrica** respecte a l'eix **OY**, funció parella, si **f(x)=f(-x)**; i és **simètrica** respecte a l'**origen**, funció senar, si **f(-x)=-f(x)**.
- ✓ La **taxa de variació** d'una funció entre dos punts és la diferència: **TV[x1,x2]=f(x2)-f(x1)**
La **taxa de variació mitjana** és:
$$TVM[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
- ✓ Una funció és **creixent** en un interval, quan donats dos punts qualssevol del mateix
 - Si $x_1 < x_2$ aleshores $f(x_1) < f(x_2)$I és **decreixent**
 - Si $x_1 < x_2$ aleshores $f(x_1) > f(x_2)$
- ✓ Una funció contínua en un punt $x=a$, presenta un **màxim** relatiu, si a l'esquerra de l'esmentat punt és creixent i a la dreta és decreixent. Si, al contrari, és decreixent abans i creixent després hi ha un **mínim** relatiu.
- ✓ La gràfica d'una funció pot ser **còncava** (avall) o **convexa** (amunt). Els punts del domini en què canvia la concavitat, s'anomenen **punts d'inflexió**.



Domini

Tots els nombres reals excepte el 0.

Continuïtat

No és contínua, en 0 presenta una discontinuïtat de salt infinit.

Simetria

És simètrica respecte a l'origen de coordenades, funció senar.

Talls eixos

A l'eix d'abscisses en (-1,0) y (1,0); no talla l'eix d'ordenades.

Creixement i decreixement

És creixent en $(-\infty, -2,5) \cup (2,5, +\infty)$

I decreixent en $(-2,5, 0) \cup (0, 2,5)$

Màxims i mínims

Màxim en (2,5 ,3);

Mínim en (-2,5 ,3)

Concavitat i convexitat

Punts d'inflexió

És còncava a $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$

I convexa a $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$

(-3,0) y (3,0) són punts d'inflexió. A $x=0$ canvia la concavitat però no hi ha punt d'inflexió ja que no és del domini.

Autoavaluació



1. Calculeu la imatge de $x=0$ en la funció:

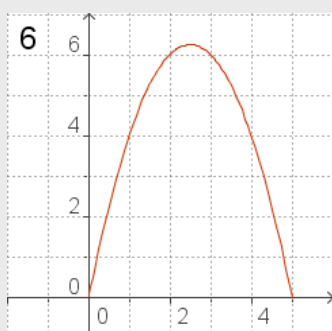
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 3 \\ 5 & x > 3 \end{cases}$$

2. Calculeu el domini de la funció:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$$

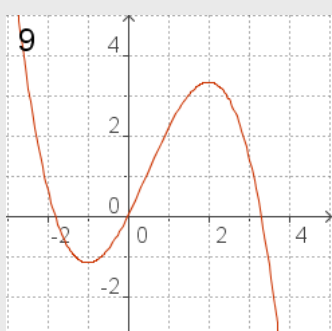
3. Quin dels punts següents: $(1,-2)$ $(3,-15)$ $(4,-26)$ no pertany a la gràfica de la funció $f(x) = -x^2 - 3x + 2$?

4. Calculeu els punts de tall amb els eixos coordenats de la recta $y = -0,25x - 0,75$.



5. Si $y=f(x)$ és una funció SENAR i $f(3)=-2$, Quant val $f(-3)$?

6. La gràfica mostra el primer tram d'una funció periòdica amb període 5 i expressió $f(x) = -x^2 + 5x$ ($0 \leq x < 5$). Calculeu $f(28)$.

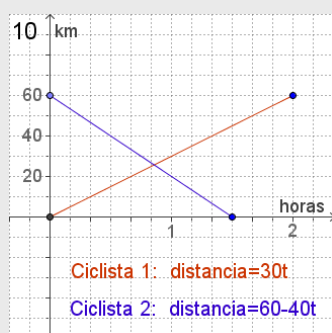


7. Esbrineu el valor de k perquè la funció siga contínua a $x=3$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + k & x \leq 3 \\ 6 & x > 3 \end{cases}$$

8. Calculeu la TVM $[-3,0]$ de la funció $f(x) = -0,25x^2 - 3x + 1$.

9. Determineu l'interval en què la funció de la gràfica és decreixent.



10. Un ciclista ix d'un punt A cap un altre B distant 60 km a una velocitat constant de 30 km/h. Alhora un altre ix de B cap a A, a 40 km/h. A quants km del punt A es creuen a la carretera?

Funcions i gràfiques

Solucions dels exercicis per a practicar

1. $f(x) = x^2 - 1$ $f(-1) = 0$, $f(2) = 3$, $f(1) = 0$
Tall OY: -1 Tall OX: 1 y -1

2. $y = \frac{x}{2} + 3$

$f(-1)=2,5$ $f(1)=3,5$ $f(3)=4,5$
Tall OY: 3 Tall OX: -6

3. $f(x) = 2x - 5$

$f(-2) = -9$, $f(-1) = -7$, $f(1) = -5$
Tall OY: -5 Tall OX: 2,5

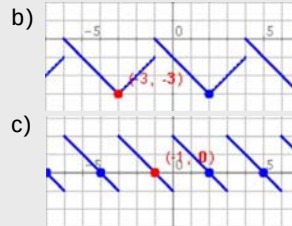
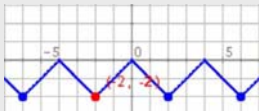
4. a) És un polinomi, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
 b) Tots els reals excepte el 2
 c) $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
 d) Tots els reals
 e) $(2, +\infty)$

5. a) És discontinua en $x=3$
b) És discontinua en $x=-3$
6. a) Discontinua en 1.
A l'esquerra: 3; A la dreta: 1
b) Continua en 0.
A l'esquerra: 2; A la dreta: 2
c) Continua en -1.
A l'esquerra: 4; A la dreta: 4
c) Continua en -1.
A l'esquerra: 4; A la dreta: 4

7. a) e) són senars; b) c) y f) són parells; d) no és parell ni senar

8. a) $TVM[0,4]=TVM[2,4]=0,5$
b) $TVM[0,4]=1,2$; $TVM[2,4]=1,8$

9. a)



10. a) 27,5 litres; entre los km 200 i 360 i del 440 fins al 520.
b) En dos, una en el km 200 i altra en el 440; en vaig posar més a la 1ª; a los 280 km
c) 12,5 l; 32,5 l; 6,25 l/100 km
11. a) J. 25 kg, M. 35 kg ; a los 14 anys
b) A los 11 (30 kg) i a los 15 (55 kg)
J més que M: fins al 11 i des dels 15;
M més que J: dels 11 a 15
c) 25kg; 6,25 kg/any; M entre els 11 i 12 (10 kg/any); J entre els 12-14 (10 kg/any)
12. a) 80 km; a las 10:15; 75 i 70 min
b) 10 min en km 20, 20 min en km 30; en el km 20 i en 30 respectivament.
c) 64 km/h i 68,6 km/h; 1º: min 60-75
2º: min 15-30 i min 70-85
13. I) a) IR; b) (0,0)(3,0)
c) $y > 0$ (0, +∞); $y < 0$ (-∞, 0);
d) creix: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, decreix: $(1, 3)$;
e) màx $x = 1$, mín $x = 3$;
f) Uno; cònc: $(-\infty, 2)$ conv: $(2, +\infty)$
II) a) $\mathbb{R} - \{0\}$; b) No talla
c) $y < 0$ (0, +∞); $y > 0$ (-∞, 0);
d) decreix: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, creix: $(-1, 0) \cup (0, 1)$
e) màx $x = 1$, mín $x = -1$;
f) Cap; conv: $(-\infty, 0)$ cònc: $(0, +\infty)$

Solucions de l'AUTOAVALUACIÓ

1. $f(0) = -1$
2. $\mathbb{R} - \{2, -2\}$
3. $(3, -15)$
4. $(0, -0,75) \quad (-3, 0)$
5. $f(-3) = 2$
6. $f(28) = f(3) = 6$
7. $k = 0$
8. $\text{TVM}[-3, 0] = -2,25$
9. $(-3, 1)$
10. A partir de 4,25 min la A.

No oblideu enviar les activitats al tutor ►