

Objectius

En aquesta quinzena aprendreu a:

- Trobar els esdeveniments d'un experiment aleatori i realitzar operacions utilitzant-los.
- Determinar si dos esdeveniments són compatibles o incompatibles.
- Calcular la probabilitat d'un esdeveniment mitjançant la regla de Laplace.
- Conèixer les propietats de la probabilitat.
- Trobar la probabilitat d'un esdeveniment en un experiment compost.
- Trobar probabilitats d'esdeveniments dependents i independents.
- Aplicar la probabilitat a situacions de la vida quotidiana.

Abans de començar.

1. Experiments aleatoris..... pàg. 204
Espai mostral i esdeveniments
Operacions amb esdeveniments
Esdeveniments incompatibles
Recta que passa per dos punts
2. Probabilitat d'un esdeveniment.... pàg. 206
La regla de Laplace
Freqüència i Probabilitat
Propietats de la Probabilitat
Calcular Probabilitats
3. Experiments compostos..... pàg. 208
Esdeveniments compostos
Regla de la multiplicació
Extraccions amb i sense devolució
4. Probabilitat condicionada..... pàg. 209
Esdeveniments dependents
i independents
Diagrames d'arbre
Probabilitat total
Probabilitat a posteriori

Exercicis per practicar

Per saber-ne més

Resum

Autoavaluació

Activitats per enviar al tutor

Abans de començar

EuroMillones €
55 millones de
 18/01/08 un único acertante podría ganar

El juego más apasionante para hacerte millonario
La Quiniela

ADEMÁS.....
 reintegros, aproximaciones, centenas, últimas cifras.
 1 de cada 3 décimos tiene pr

BOTERO PRIMITIVA

Este jueves por 3 euros
1.200.000

BonoLoto
717
 Miles de € **VIERNES 18/01/08**

un único acertante podría ganar
El Quinigol BOTE
219 20/01/08 Miles de € JORNADA: 32ª

un único acertante podría ganar
Quintuple Plus 43.000 €
 20/01/08 **Lototurf 1.430.000 €**

Segur que d'una manera o una altra en moltes ocasions heu fet servir probabilitats i no sempre a l'escola. Expressions com "probablement plourà demà" o com "és probable que el que digui sigui veritat" són bastant comunes en el llenguatge quotidià.

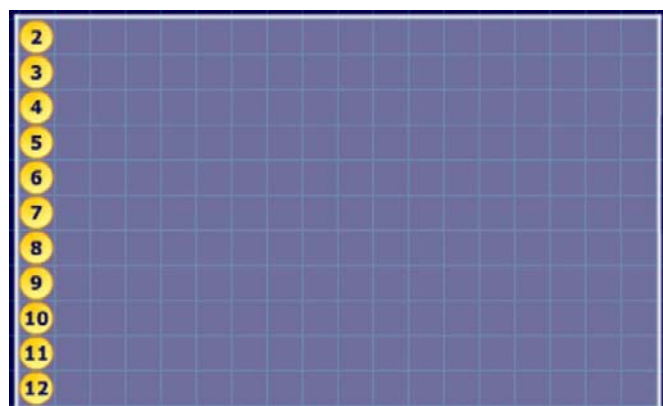
Transmissió hereditària. Un exemple, la sordesa. En una parella de sords, per a cada fill que tinguin la probabilitat que també sigui sord és de 0,25. El grup sanguini dels fills depèn del dels pares amb unes probabilitats que es poden calcular. Les malalties sanguínies genètiques superen les 3.500, i contínuament se'n descobreixen més.

Probabilitat en el llenguatge ordinari: Casual, accidental, eventual, fortuït, impensat, imprevisible, inesperat, inopinat, ocasional, per sort, per xamba, de rebot, sense voler, sense intenció.

Els jocs d'atzar. En jugar al dòmino, a les cartes, als daus, hi ha moltes ocasions en què "ens la juguem", i de ben segur que considerem si és més o menys probable que surti bé o malament.

Investigueu

Tirem dos daus i sumem els resultats, la fitxa numerada amb la suma avança una casella. Totes tenen la mateixa probabilitat d'arribar primer? Vosaltres per quin apostaríeu?



1. Experiments aleatoris

Espai mostral i esdeveniments.

En extreure una carta d'una baralla, llançar una moneda, tirar un dau, i en altres exemples anàlegs, no podem saber per endavant el resultat que s'obtindrà. Són experiments **aleatoris** aquells en els quals no es pot predir el resultat, i sobre aquests es parla a continuació.

El conjunt de tots els possibles resultats d'un experiment aleatori s'anomena **espai mostral**, i cada un d'aquests possibles resultats és un **esdeveniment elemental**.

- ✓ Un **esdeveniment** és qualsevol subconjunt de l'espai mostral, es verifica quan ocorre qualsevol dels esdeveniments elementals que el formen.

Hi ha un esdeveniment que es verifica sempre, l'**esdeveniment segur** que és el mateix espai mostral.

- En tirar una moneda i un dau, una forma de representar l'espai mostral és:



O bé: (cara, 1) (cara, 2),...

- En tirar tres monedes (o una moneda tres vegades) l'espai mostral és:



Operacions amb esdeveniments

Amb els esdeveniments d'un experiment aleatori es poden realitzar diferents operacions. Donats dos esdeveniments A i B:

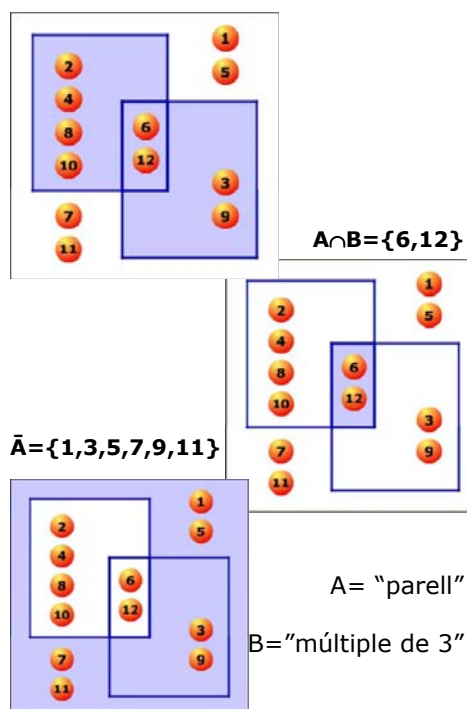
- La **unió** d'A i B, **$A \cup B$** , és l'esdeveniment format per tots els esdeveniments elementals d'A i de B. Ocorre quan succeeix A o succeeix B o ambdós.
- La **intersecció**, **$A \cap B$** , és l'esdeveniment format pels esdeveniments elementals comuns a A i B. Es verifica quan ocorren A i B alhora.
- La **diferència** d'A i B, **$A \setminus B$** , és l'esdeveniment format pels esdeveniments elementals d'A que no hi ha a B. Ocorre si es dona A però no B.

L'esdeveniment **contrari** a un donat A, està format per tots els esdeveniments de l'espai mostral que no hi ha a A. És el que ocorre quan no es dona A i s'indica **\bar{A}** .

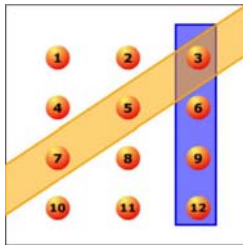
- L'esdeveniment **contrari** al **segur** és l'**esdeveniment impossible**, que no es verifica mai, i que s'indica amb \emptyset .

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$$



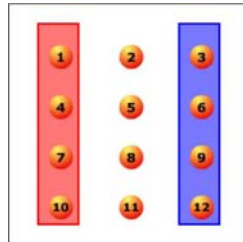
Esdeveniments compatibles



Quan surt 3, tots dos s'esdevenen.

Esdeveniments incompatibles

No s'esdevenen alhora, però no són contraris



Esdeveniments compatibles i incompatibles

En un experiment aleatori hi ha esdeveniments que poden ocórrer alhora i esdeveniments que no.

- Dos esdeveniments es diuen **compatibles** si tenen algun esdeveniment elemental comú. En aquest cas $A \cap B \neq \emptyset$, poden ocórrer alhora.
- Dos esdeveniments es diuen **incompatibles** si no tenen cap esdeveniment elemental comú, en aquest cas $A \cap B = \emptyset$ i no poden ocórrer alhora.

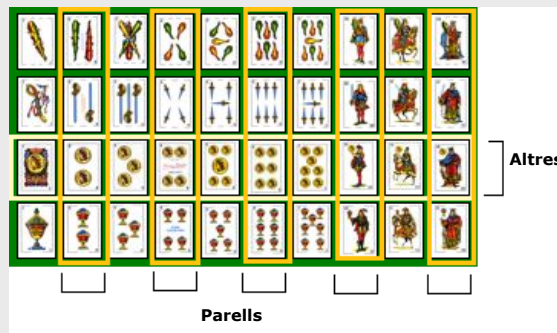
Un esdeveniment i el seu contrari són sempre incompatibles, però dos esdeveniments incompatibles no sempre són contraris, com es pot comprovar en els exemples de l'escena.

EXERCICIS resoltos

1. En una bossa tenim tres boles numerades com a 1, 2 i 3. Considerem l'experiment d'extreure una bola i anotar-ne el número. Escriu tots els esdeveniments possibles. Indiqueu quins d'aquests són els elementals.

$\{\}, \{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1\}, \{2\}$ y $\{3\}$. Els tres últims són els elementals.

2. En una baralla, sota l'experiment d'extreure una carta, considereu els esdeveniments a) parell, b) oros, c) parell i oros, d) parell o oros, e) parell menys oros, f) oros menys parell i g) no parell



Observeu la imatge,

- a) hi ha 20 cartes envoltades de taronja, les parells,
- g) unes 20 més que no, les senars,
- b) 10 oros.
- c) El 2, 4, 6, 10 i 12 d'oros són parells.
- d) Tots els oros i parells junts són 25 cartes (totes les envoltades de groc o taronja)
- e) Als 2, 4, 6, 10 i 12, s'hi ha de treure el 2, 4, 6, 10 i 12 d'oros, a 20 cartes se li'n treuen 5 i en queden 15
- f) L'1, 3, 5, 7 i 11 d'oros

3. En tirar un dau considerem els esdeveniments: $A = \{\text{Parell}\}$, $B = \{\text{més gran que } 3\}$, i $C = \{\text{imparell}\}$. Dels tres parells d'esdeveniments possibles AB, AC i BC, indiqueu quins són compatibles i/o incompatibles:

AB compatibles, quan surti el 4 o el 6.

AC incompatibles, si és parell no pot ser senar.

BC compatibles, quan surti el 5.

Probabilitat

2. Probabilitat d'un esdeveniment

La regla de Laplace

Quan un experiment aleatori és regular, és a dir, que tots els esdeveniments elementals tenen la mateixa probabilitat d'ocórrer o són **equiprobables**, per calcular la probabilitat d'un esdeveniment qualsevol A, n'hi ha prou amb comptar i fer el quocient entre el nombre d'esdeveniments elementals que componen A (**casos favorables**) i el nombre d'esdeveniments elementals de l'espai mostral (**casos possibles**).

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{Casos possibles}}$$

Aquest resultat es coneix com a **regla de Laplace**. Observeu que per poder aplicar-la és necessari que tots els casos possibles siguin igualment probables.

Freqüència i probabilitat

Com sabeu, la **freqüència absoluta** d'un esdeveniment és el nombre de vegades que apareix quan es repeteix un experiment aleatori, i la **freqüència relativa** és la freqüència absoluta dividida pel nombre de vegades, **n**, que es repeteix l'experiment aleatori.

Quan aquest nombre **n** és molt gran, la freqüència relativa amb què apareix un esdeveniment tendeix a estabilitzar-se cap a un valor fix.

Aquest resultat, conegut com a **lleï dels grans nombres**, ens porta a definir la probabilitat d'un esdeveniment com aquest nombre cap el qual tendeix la freqüència relativa en repetir l'experiment moltes vegades.

Propietats de la probabilitat

Vista la relació entre freqüència relativa i probabilitat, es compleix que:

- La probabilitat d'un esdeveniment és un nombre entre 0 i 1.
- La probabilitat de l'esdeveniment segur és 1 i la de l'esdeveniment impossible 0.
- La probabilitat de la unió de dos esdeveniments **incompatibles** A i B és **$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$** .

I d'aquestes es dedueix a més que:

- La probabilitat del contrari és **$p(A) = 1 - P(A)$**

- La probabilitat de la unió de dos esdeveniments compatibles és **$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$**



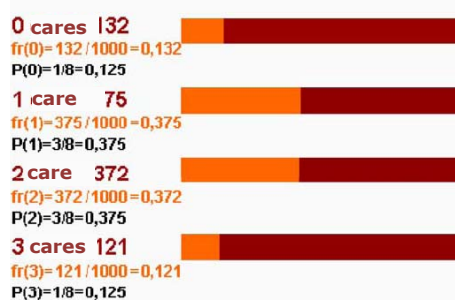
Extraiem una carta d'una baralla de 40:

$$P(\text{bastos}) = 10/40 = 0,25$$

$$P(\text{as}) = 4/40 = 0,1$$

$$P(\text{as de bastos}) = 1/40 = 0,025$$

Resultats obtinguts en la simulació de tirar tres monedes 1.000 vegades



Sospitem que un dau està trucat i ens entretenim a tirar-lo 100 vegades i a anotar-ne els resultats. Obtenim:

	1	2	3	4	5	6
F	20	30	15	15	10	10
Fr	0.2	0.3	0.15	0.15	0.1	0.1

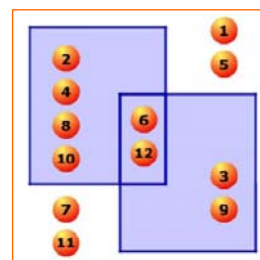
Conclourem, $P(1) = P(2) = \dots$ ja no és $1/6$, sinó aproximadament $P(1) = 0,2$; $P(2) = 0,3$ etc. Aquí fem servir la freqüència relativa com a probabilitat, d'ara endavant ho tindrem en compte a l'hora de jugar amb aquest dau.

A = "parell" B = "múltiple de 3"

$$P(A) = 6/12 = 1/2 \quad P(B) = 4/12 = 1/3$$

$$P(\bar{A}) = 1/2 \quad p(B) = 2/3$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$



EXERCICIS resolts

4. Tenim un dau de 20 cares $\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,6,6,6,6,6\}$ perfectament equilibrat. Quina és la probabilitat d'obtenir cada un dels resultats possibles?

$$P(1)=1/20=0,05 \quad P(2)=2/20=0,1 \quad P(3)=3/20=0,15$$

$$P(4)=4/20=0,2 \quad P(5)=5/20=0,25 \quad P(6)=5/20=0,25$$

5. Si tirem el dau anterior 1.000 vegades, quantes vegades s'espera que surti cada resultat aproximadament?

L'1 sortirà prop de 50 vegades. El 2, prop de 100. El 3 prop de 150, el 4 prop de 200, el 5 prop de 250 i el 6 prop de 250.

6. Per al dau $\{1,1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5\}$ de 20 cares calculeu les probabilitats següents:

- a) $P(\text{parell}) = 8/20 = 0,4$ Hi ha tres 2 i cinc 4, 8 parells
 b) $P(\text{més gran de 3}) = 11/20 = 0,55$ 11 de possibles entre 20
 c) $P(\text{parell i més gran de 3}) = 5/20 = 0,25$ Només el 4 és parell i més gran de 3, i n'hi ha 5
 d) $P(\text{parell o més gran de 3}) = 14/20 = 0,7$ Si surt 2, 4 o 5
 e) $P(\text{parell menys més gran de 3}) = 3/20 = 0,15$ Només si surt 2
 f) $P(\text{més gran de 3 menys parell}) = 6/20 = 0,3$ Si surt 5
 g) $P(\text{no parell}) = 12/20 = 0,6$ Si en surten 1, 3 o 5

7. En una bossa tenim 7 boles vermelles, 9 boles blaves i 4 de verdes. Extraiem una bola, calculeu la probabilitat que

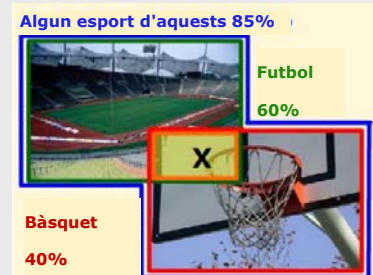
- a) No sigui vermella $P(\text{no R}) = 13/20 = 0,65$ Hi ha 20 boles, 7 de vermelles, 13 de no vermelles
 b) Sigui verda $P(V) = 4/20 = 0,2$ 4 de verdes
 c) Sigui vermella o blava $P(\text{RUA}) = 16/20 = 0,8$ $7 + 9 = 16$ de vermelles o blaves

8. En un grup, el 40% juga a bàsquet i el 60% a futbol. Si sabem que el 85% practica algun dels dos esports, quin percentatge juga a tots dos?

$$P(F) = 0,60 \quad P(B) = 0,40 \quad P(F \cup B) = 0,85$$

$$P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B)$$

$$0,85 = 0,60 + 0,40 - P(F \cap B) \quad P(F \cap B) = 0,15 \quad 15\%$$



9. En el grup A hi ha 18 persones, de les quals 10 parlen anglès i 8 no; en el B hi ha 12 persones, de les quals 3 parlen anglès i 9 no; en el C hi ha 10 persones, entre les quals 3 parlen anglès i 7 no. Es tria a l'atzar una persona de cada grup. Calculeu la probabilitat que de les tres, almenys una parli anglès.

En els set esdeveniments de la dreta hi ha almenys una persona que parla anglès. En comptes de mirar les seves probabilitats, és més còmode calcular la **del contrari, que cap dels tres no parli anglès**. Per escollir el de l'A disposem de 8 persones que no parlen anglès, per al del B, de 9 persones, i per al del C, de 7. Així els casos favorables perquè cap parli anglès són $8 \cdot 9 \cdot 7$ i els casos possibles són $18 \cdot 12 \cdot 10$

$$P(\text{almenys un parli anglès}) =$$

$$= 1 - P(\text{cap no parli anglès}) =$$

$$= 1 - 8 \cdot 9 \cdot 7 / 18 \cdot 12 \cdot 10 = 1 - 7/30 = \mathbf{23/30}$$

De l'A	Del B	Del C
😊 I speak English	😊 I speak English	😊 I speak English
😊 I speak English	😊 I speak English	😞 No parlo anglès
😊 I speak English	😞 No parlo anglès	😊 I speak English
😞 No parlo anglès	😊 I speak English	😊 I speak English
😊 I speak English	😞 No parlo anglès	😞 No parlo anglès
😞 No parlo anglès	😊 I speak English	😞 No parlo anglès
😞 No parlo anglès	😞 No parlo anglès	😊 I speak English

Probabilitat

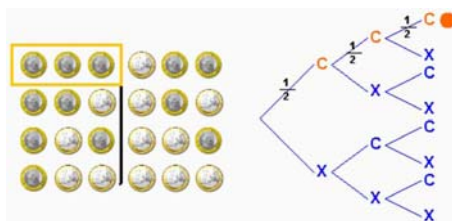
3. Experiments compostos

Esdeveniments compostos

Un **experiment compost** és el que està format per diversos experiments simples realitzats de forma consecutiva.

Per calcular l'espai mostral d'un experiment compost convé, en moltes ocasions, fer un diagrama d'arbre que representi totes les opcions. Cada resultat ve donat per un camí del diagrama. Observeu en l'exemple com es construeix el diagrama d'arbre.

Tirem una moneda tres vegades seguides. Quina és la probabilitat d'obtenir tres cares?



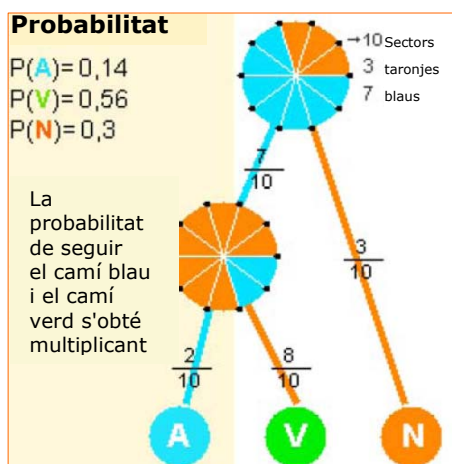
8 casos possibles. La probabilitat de C
1 cas favorable en cada moneda 1/2

$$P(CCC) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Regla de la multiplicació

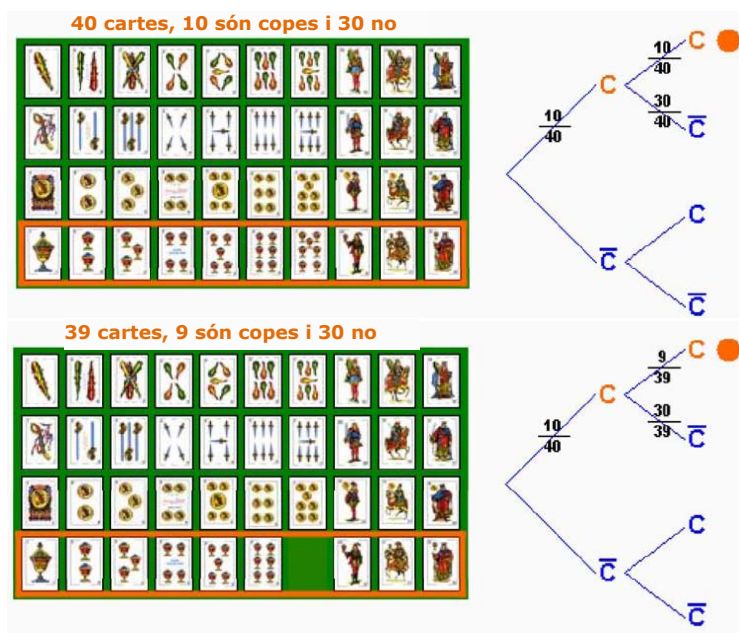
Si us heu fixat en l'exemple de la pàgina anterior, en indicar la probabilitat de cada branca del camí s'obtenia la probabilitat de cada esdeveniment compost calculant el producte dels esdeveniments simples respectius.

Per calcular la probabilitat d'un esdeveniment en un experiment compost es **multipliquen les probabilitats** dels esdeveniments simples que el formen.



Extraccions amb devolució i sense devolució

Un exemple d'experiment compost el trobem en l'extracció successiva de cartes o de boles d'una urna... en aquests casos cal considerar si es torna la carta, bola, etc. abans de treure la següent o no.



Extraiem dues cartes d'una baralla de 40. Quina és la probabilitat que les dues siguin copes?

La probabilitat que la primera carta sigui de copes és 10/40.

Per a la segona, la probabilitat depèn que tornem la primera carta a la baralla o no.

Amb devolució

$$P(CC) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16}$$

Sense devolució

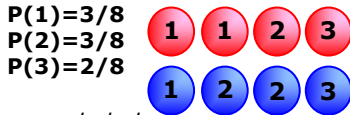
$$P(CC) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$$

$$P(B/A) = \frac{\text{Casos favorables de B que es doni A}}{\text{Casos possibles que es doni A}} = \frac{\text{Casos favorables d'A i B}}{\text{Casos favorables d'A}}$$

$$= \frac{\frac{\text{Casos favorables d'A i B}}{\text{Casos favorables en total}}}{\frac{\text{Casos favorables d'A}}{\text{Casos favorables en total}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Els esdeveniments "el dia és gris" i "portar paraigua" influeixen entre si. Els esdeveniments "estudiar" i "aprovar" són esdeveniments que s'afavoreixen; quan s'estudia, augmenta la probabilitat d'aprovar.

En una urna tenim boles vermelles i blaves enumerades com en la figura. Quina és la probabilitat de treure cada número?



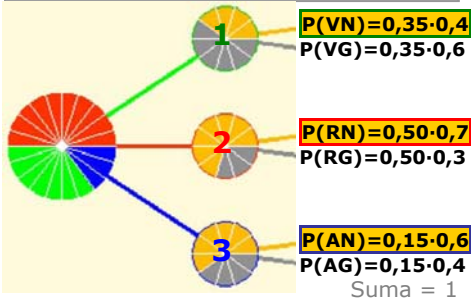
Si sabem que la bola és vermella

$P(1/R) = 2/4$ (de 4 de vermelles n'hi ha 2 amb 1)

$P(2/R) = 1/4$ (de 4 de vermelles n'hi ha 1 amb 2)

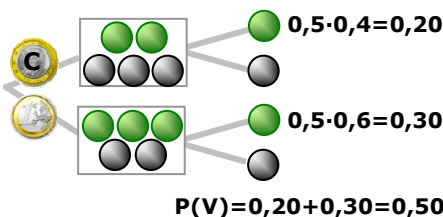
$P(3/R) = 1/4$ (de 4 de vermelles n'hi ha 1 amb 3)

$P(3) = P(3/R)$ són independents.



$$P(N) = P(V) \cdot P(N/V) + P(R) \cdot P(N/R) + P(A) \cdot P(N/A) = 0,35 \cdot 0,4 + 0,50 \cdot 0,7 + 0,15 \cdot 0,6 = 0,58$$

Es tira una moneda, segons que surti cara o creu es treu una bola de l'urna indicada. Si la bola surt verda, quina és la probabilitat que surti cara?



$$P(C/V) = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,5 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,6} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$$

4. Probabilitat condicionada

Esdeveniments dependents i independents

Quan es realitzen observacions de diversos esdeveniments pot ser que un depengui de l'altre.

La probabilitat que ocorri un esdeveniment B quan està ocorrent un altre, A, s'anomena **condicionada**, i s'expressa $p(B/A)$.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Donats dos esdeveniments, es diu que són **independents** si la presència de l'un no influeix en la probabilitat de l'altre, és a dir, si $P(B/A) = P(B)$; en cas contrari són **dependents**.

- ✓ A i B independents: $P(B/A) = P(B)$ i en tenir en compte la fórmula anterior per a $p(B/A)$,
- ✓ A i B dependents: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

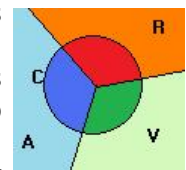
Probabilitat total

Com heu pogut veure, en els experiments compostos es pot fer un diagrama en arbre, i cada resultat ve donat per un camí en l'arbre esmentat. Per calcular una probabilitat només s'ha de dibuixar el camí corresponent, i el producte de les probabilitats de totes la branques que el formen serà el valor que busquem.

Així, si ocorre A i després B: $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B/A)$

- ✓ La suma de les probabilitats de tots els camins és igual a 1

Considerem els esdeveniments representats per la imatge. Vr=Vermell, V=Verd i B=Blau són tres esdeveniments incompatibles i la unió dels quals forma tot l'espai mostral. Sigui E=Cercle un esdeveniment qualsevol. Llavors,



$$P(C) = P(R) \cdot P(C/R) + P(V) \cdot P(C/V) + P(A) \cdot P(C/A)$$

Aquest resultat és el que es coneix com a **probabilitat total**.

Probabilitat a posteriori

A vegades interessa conèixer la $P(A/E)$, és a dir, quan ja sabem que ha ocorregut E en la segona experiència, ens preguntem la probabilitat que s'hi hagi arribat a través d'A.

Es tracta d'una probabilitat condicionada:

$$P(A/S) = \frac{P(A \cap S)}{p(S)}$$

Expressió coneguda

com a **Fórmula de Bayes**.

Exercicis resoltos

10. Tirem un dau de 4 cares {1,2,3,4} i un altre de 10 {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4}. Quina és la probabilitat d'obtenir dos 3? I dos 4?

$$P(3 \text{ y } 3) = 1/4 \cdot 3/10 = 3/40 = 0.075$$

$$P(4 \text{ y } 4) = 1/4 \cdot 4/10 = 4/40 = 0.1$$

11. En una bossa tenim 5 boles numerades de l'1 al 5. Extraiem dues boles, a) Quina és la probabilitat d'obtenir un 2 i un 3 si no tornem les boles tretes? b) i quina si les tornem?

Sense devolució $P = 1/5 \cdot 1/4 = 0.05$
 Amb devolució $P = 1/5 \cdot 1/5 = 1/25 = 0.04$

12. En tirar dos daus, quina és la probabilitat d'obtenir almenys 10 punts?

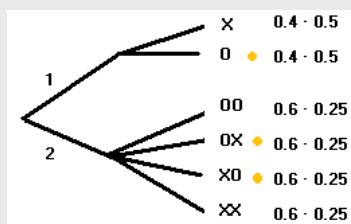
S'obtenen 10 o més punts en 46 64 55 56 65 i 66.
 Són 6 casos, cadascun amb probabilitat $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$.
 $P(\text{almenys 10 punts}) = 6 \cdot 1/36 = 1/6$
 O bé, hi ha sis casos favorables d'entre els 36 possibles, $P. = 6/36 = 1/6$

13. Tirem una moneda canviada en la qual $P(C)=0,6$ i $P(X)=0,4$. Si surt cara tirem un dau {1,2,3,4} de 4 cares i si surt creu, un {1,2,3,4,5,6} de sis. Tenim la mateixa probabilitat que surti 1 després que hagi sortit cara o creu? Quant val en cada cas? Quin és la probabilitat que surti 1?

No, $P(C1)=0,6 \cdot 1/4 = 3/20$ $P(X1) = 0,4 \cdot 1/6 = 2/30$
 $P(1) = P(C1) + P(X1) = 3/20 + 2/30 = 13/60$

14. Tenim un dau {1,1,1,1,2,2,2,2,2,2} de 10 cares. Si traiem un 1 tirem una moneda, i dos si traiem un 2. Quina és la probabilitat d'obtenir una cara?

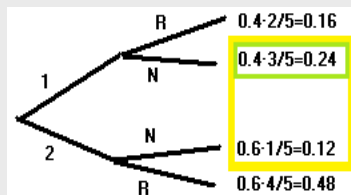
Els casos 10, 20X i 2X0 tenen una cara.
 La suma de les probabilitats és la solució:
 $P = 0,2 + 0,15 + 0,15 = 0,5$



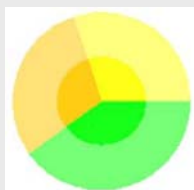
15. Tenim un dau {1,1,1,1,2,2,2,2,2,2} de 10 cares. Tirem el dau, si surt 1 traiem una bola de {RRNNN} i si traiem un 2 en traiem una de {RRRRN}. Ha sortit N. Quina és la probabilitat que fos amb un 1 del dau?

Observeu la figura, la probabilitat que hagi sortit 1N entre el que pot ser que hagi sortit 1N o 2N és:

$$P(1/N) = \frac{0.24}{0.24 + 0.12} = \frac{0.24}{0.36} = 0.666$$



16. La probabilitat d'encertar en groc a la diana de la figura és 0,3; en verd, 0,4, i en taronja, 0,3. A més si s'encerta en groc la probabilitat que sigui brillant és 0,7; la probabilitat que sigui verd brillant és 0,6 i en taronja 0,3.



- a) Quina és la probabilitat d'encertar a la zona brillant?

$$P(\text{Brillant}) = P(A) \cdot P(\text{Brillant}/A) + P(V) \cdot (P(\text{Brillant}/V) + P(N) \cdot P(\text{Brillant}/N))$$

$$P(\text{Brillant}) = 0,3 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,21 + 0,24 + 0,15 = 0,60$$

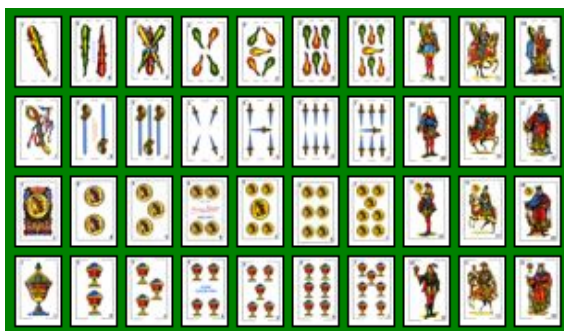
- b) Si s'ha encertat a la zona brillant, quina és la probabilitat que sigui groc?

$$P(A/\text{Brillant}) = P(A \text{ i Brillant}) / P(\text{Brillant}) = 0,3 \cdot 0,7 / 0,60 = 0,21 / 0,60 = 0,35$$



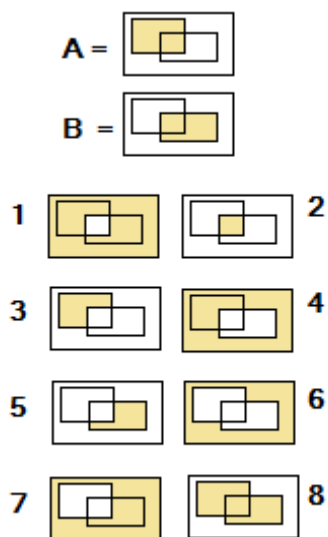
Per practicar

- Hi ha al mercat diversos tipus de daus, tot i que el més normal és el cúbic de sis cares. N'hi ha de 4, 6, 10, 12, i 20 cares. En general, van numerats de l'1 fins al nombre de cares que tenen. Escriu l'esdeveniment "parell" per a cadascun.
- Tenim un dau de 4 cares numerades de l'1 al 4. El tirem una vegada. Escriviu l'esdeveniment segur, l'impossible, i tots els possibles classificats per les seves dimensions.
- Tenim un dau de 6 cares blanc, en què s'han escrit a les cares els números següents $\{1,1,1,2,2,3\}$. Escriviu tots els esdeveniments possibles.
- A l'escola municipal d'un poble hi ha classes per a esports d'equip de bàsquet, futbol i voleibol. N'hi ha 100 d'inscrits en esports d'equip, 70 van a classes de futbol, 60 de bàsquet i 40 a futbol i bàsquet. Quants van només a voleibol?
- Determineu el nombre de cartes, en una baralla espanyola de 40:
 - Amb numeració inferior a 4.
 - De bastos i més gran que 4.
 - Figures d'oros o bastos.
- En una baralla espanyola, compteu les cartes dels esdeveniments :
 - Oros i sets
 - Oros o sets
 - Set d'oros
 - Figures
 - Oros o figures
 - Oros i figures
- Per a un dau de sis cares $\{1,2,3,4,5,6\}$, escriviu els esdeveniments:
 - Parell
 - No parell
 - Parell i més gran que 3
 - Parell o més gran que 3
 - Parell menys més gran que 3
 - El contrari de (parell i més gran que 3)
- Tenim un dau amb els nombres $\{1,1,1,2\}$. Si el tirem 100 vegades, quina quantitat de vegades sortirà cada un dels resultats possibles.
- Tenim un dau de deu cares numerades com $\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4\}$. Quina és la probabilitat de cada un dels esdeveniments elementals?
- Tenim una ruleta de 10 posicions, 3 de vermelles, 4 de verdes, 2 de negres i 1 de blava. Quina és la probabilitat que en girar-la s'obtingui cada un dels colors?
- Si tirem dues monedes podem obtenir un d'aquests 4 resultats $\{OO, XO, OX, XX\}$. Podeu escriure d'aquesta manera els resultats possibles per a tres monedes? I per a 4? Quina és la probabilitat d'obtenir dues cares en cada un dels experiments?

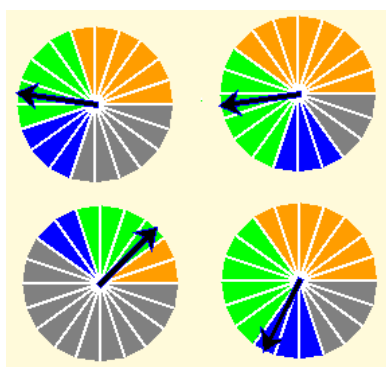


Probabilitat

12. Si sabem que $P(A) = 0,5$, $p(B) = 0,7$ i $P(2) = 0,3$, calculeu $P(1)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$ i $P(8)$,



13. Quina és la probabilitat d'obtenir taronja, verda, blava o grisa a cada una de les ruletes següents?



14. Tenim un dau de 10 cares d'aquesta forma $\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2\}$. I dues urnes, una $A = \{R, R, R, V, V\}$ i $B = \{R, V, V, V, V\}$. Tirem el dau, si surt 1 extraiem una bola d'A, i si surt 2, de B. Quina és la probabilitat d'extreure'n una de vermella d'A? I una vermella de B? I una de verda d'A?
15. En una bossa hi ha les boles següents $\{1, 2, 2, 3, 3\}$. Extraiem primer una bola, la tornem i n'extraiem una altra. Calculeu les probabilitats següents: $P(1,1)$, $P(1,2)$, $P(1,3)$.

16. Si per a la segona extracció de l'exercici anterior no tornem la primera bola, quin és el valor de les probabilitats ara?

17. Calculeu les probabilitats d'obtenir 2 oros en extreure dues cartes d'una baralla espanyola en els casos de tornar i de no tornar la primera carta a la baralla abans d'extreure la segona.

18. Tenim un dau de 10 cares de la forma $\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2\}$, i dues urnes, una $A = \{R, R, R, V, V\}$ i una altra $B = \{R, V, V, V, V\}$. Tirem el dau, si surt 1 extraiem una bola d'A, i si surt 2, de B. Quina és la probabilitat d'extreure una R? I una V?

19. Tenim una urna amb boles numerades com s'indica $\{1, 1, 2, 2, 2\}$ i dues urnes $I = \{R, V\}$ i $II = \{N, N, R, V\}$. Extraiem una bola per decidir de quina urna n'escollim una altra. Quina és la probabilitat d'obtenir R o N?

20. Un cop fet l'experiment de l'exercici anterior, ha resultat ser V. Quina és la probabilitat que hagués estat extreta de l'urna A? I de la B?

21. Es tiren dues monedes. Si surten dues cares es tira el dau $\{1, 1, 1, 2, 2, 2\}$ i si no, el dau $\{1, 1, 2, 2, 3, 3\}$. Quina és la probabilitat d'obtenir un 1? Quan en surt un, amb quina probabilitat han sortit també dues cares?

22. Deu amics organitzen un viatge i tria la destinació un d'ells per sorteig. Sis volen anar a la costa i quatre a l'interior. Dels primers, dos volen anar al nord i quatre al sud. Dels d'interior, la meitat prefereixen el nord i l'altra meitat, el sud.

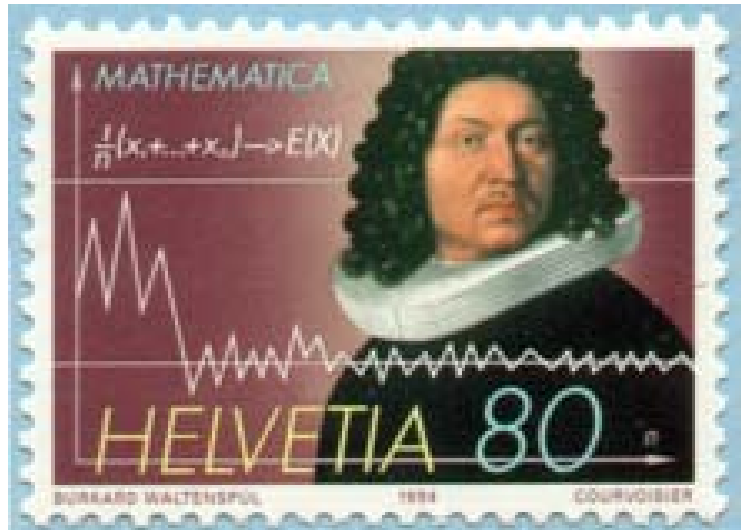
- a) Trobeu la probabilitat d'anar a la costa del nord.
- b) Quina és la probabilitat d'anar al nord?
- c) Si van al nord, quina és la probabilitat que sigui a la costa?



Una mica d'història

La probabilitat va néixer entorn dels jocs d'atzar. En les civilitzacions antigues (Egipte, Grècia, Roma) s'usava un os per fer de dau per a diversos jocs on intervenia l'atzar (d'aquí ve un joc tradicional: el joc de l'osset). Però fins i tot restes arqueològiques de fa més de 40.000 anys s'han interpretat com a elements de jocs d'atzar.

A Grècia i Roma es practicaven amb afany i passió. Homer (900 aC) explica que quan Patrocle era petit, es va enfadar tant amb un oponent jugant amb l'astràgal que gairebé el va matar.



Va ser Girolamo Cardano (1501-1576) qui va escriure la primera obra important relacionada amb el càlcul de probabilitats en els jocs d'atzar. Va ser el 1565 i es deia Llibre dels jocs d'atzar. Jacob Bernoulli (1654-1705), Abraham de Moivre (1667-1754), el reverend Thomas Bayes (1702-1761) i Joseph Lagrange (1736-1813) van desenvolupar fórmules i tècniques per al càlcul de la probabilitat. El segle XIX, Pierre Simon, marquès de Laplace (1749-1827), va unificar totes aquestes primeres idees i va compilar la primera teoria general de la probabilitat.

La probabilitat ha continuat evolucionant amb matemàtics com Poisson (1781-1840), P. Chebyshev (1821-1894), Émile Borel (1871-1956), A. Markov (1856-1922), i ha anat creant escola per superar estancaments; Andrei N. Kolmogorov de l'escola russa, (1903-1987), Norbert Wiener (1894-1964) de l'americana. En l'actualitat estadística i la probabilitat s'uneixen i es desenvolupen juntes.



Cursa amb daus

Comproveu que la fitxa amb més probabilitat de guanyar sigui la núm. 7



- $P(2)=1/36$
- $P(3)=2/36$
- $P(4)=3/36$
- $P(5)=4/36$
- $P(6)=5/36$
- $P(7)=6/36$**
- $P(8)=5/36$
- $P(9)=4/36$
- $P(10)=3/36$
- $P(11)=2/36$
- $P(12)=1/36$



Probabilitat



Recordeu el més important

Experiment aleatori

No es pot predir el resultat per molt que l'hàgim experimentat.



Per exemple, llançar un dau.

- Espai **mostral** $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Esdeveniments elementals: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ i $\{6\}$
- Altres **esdeveniments**: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 3, 5\}$
- Esdeveniment **segur**: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Esdeveniment **impossible**: $\emptyset = \{ \}$
- Esdeveniment **contrari** de A: $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$

Esdeveniments **compatibles**: són els que poden passar alhora, com ara A i B o A i C.

Esdeveniments **incompatibles**: Si no poden passar alhora, com ara parell i senar, B i C.

Probabilitat de d'esdeveniments

$$P(\text{S. segur}) = P(E) = 1$$

$$P(\text{S. impossible}) = P(\emptyset) = 0$$

$$0 \leq P(\text{esdeveniment}) \leq 1$$

Probabilitat de la unió:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ si } A \text{ i } B \text{ són incompatibles}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ A i B compatibles.}$$

Experiments compostos

Estan formats per diversos experiments simples fets de manera consecutiva. Per calcular la probabilitat de multiplicar les dels esdeveniments simples que el formen.

Probabilitat condicionada

En esdeveniments consecutius es poden produir dues situacions:

1) **Independents**, no influeixen en l'altre.

Com en les extraccions amb devolució

2) **Dependents**, cada esdeveniment està condicionat per l'anterior

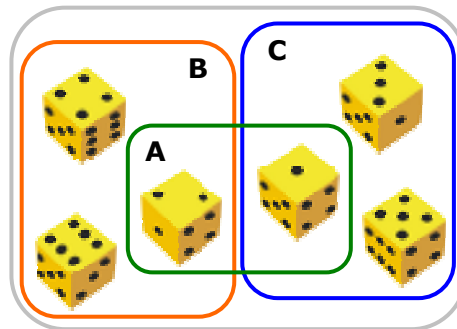
Com en les extraccions sense devolució

Probabilitat total

$$P(A) + P(V) + P(R) = 1$$

$$P(C) = P(R) \cdot P(C/R) + P(A) \cdot P(C/A) + P(V) \cdot P(C/V)$$

$$P(R/C) = \frac{P(R) \cdot P(C/R)}{P(R) \cdot P(C/R) + P(A) \cdot P(C/A) + P(V) \cdot P(C/V)}$$



Operacions amb esdeveniments

$$\text{Unió: } A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$$

$$\text{Intersecció: } A \cap B = \{2\}$$

$$\text{Diferència: } A - B = \{1\}$$

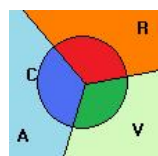
Regla de Laplace:

Per a esdeveniments elemental equiprobables:

$$p = \frac{\text{Núm. favorables}}{\text{Núm. possibles}}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B/A)$$



Per calcular la probabilitat d'un esdeveniment anterior, si sabem el que ha passat després, emprarem la **fórmula de Bayes**.

Autoavaluació



1. Tirem un dau de 10 cares. $P(\text{obtenir} < 7) =$
2. En una bossa tenim 6 boles vermelles, 9 boles blaves i 5 boles verdes. N'extraiem una bola. Quina és la probabilitat d'obtenir una bola vermella?
3. Disposem d'una baralla de 100 cartes, de quatre colors i numerades de l'1 al 25. Quina és la probabilitat d'obtenir un 23?
4. Esdeveniments elementals
 $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots, 20\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $C = \{1, 2, 3, 4, \dots, 14, 15\}$. Quina és la probabilitat d'AUC?
5. Llancem dos daus normals. Quina probabilitat hi ha d'obtenir menys de 8?
6. Quina probabilitat hi ha de no treure ni bastos ni figures en extreure una carta d'una baralla espanyola?
7. Extraiem una carta, la tornem i n'extraiem una altra, d'una baralla espanyola. Quina probabilitat hi ha de treure una carta del coll d'oros?
8. Tirem dues monedes. Si surten dues cares extraiem una bola d'una urna amb 3 B i 7 N i en cas contrari, d'una urna amb 4 B i 6 N. Quina és la probabilitat de treure una B?
9. Tirem un dau de 10 cares. Si surt menor que 7 extraiem una carta, i en cas contrari dues, tornant la primera abans de treure la segona. Quina probabilitat hi ha en d'obtenir alguna carta del coll d'oros?
10. En un col·legi el 60% dels alumnes juguen a futbol; el 50 % a bàsquet i el 90%, a un esport o l'altre. Quina probabilitat hi ha que un estudiant del col·legi practiqui tots dos esports?

Solucions dels exercicis per practicar

- $D4=\{2,4\}$, $D6=\{2,4,6\}$,
 $D10=\{2,4,6,8\}$, $D12=\{2,4,6,8,10,12\}$ i
 $D20=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$
- S impossible = $\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\},$
 $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\},$
 $\{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\},$
 $\{2,3,4\}$, S segur = $\{1,2,3,4\}$
- $\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\},$
 $\{2,3\}, \{1,2,3\}$
- 10
- a. 12 b. 6 c. 6
- a. 1 carta b. 13 c. 1 d. 12 e. 19 f. 3
- a. $\{2,4,6\}$ b. $\{1,3,5\}$ c. $\{4,6\}$ d.
 $\{2,4,5,6\}$ e. $\{2\}$ f. $\{1,2,3,5\}$
- Prop de 75 l'1 i 25 vegades el 2
- $P(1)=0,1$; $P(2)=0,2$; $P(3)=0,3$ i
 $P(4)=0,4$
- $P(\text{vermell})=0,3$; $P(\text{verd})=0,4$;
 $P(\text{negre})=0,2$ y $P(\text{blau})=0,1$
- En 3, $P(\text{dues cares})=3/8$
i en 4, $P(\text{dues cares})=6/16 = 3/8$
- $P(1)=0,7$; $P(3)=0,2$; $P(4)=0,3$;
 $P(5)=0,4$; $P(6)=0,1$; $P(7)=0,5$ y
 $P(8)=0,9$
- Sol:

Ruleta	Taronja	Verd	Blau	Gris
1	0,3	0,25	0,15	0,3
2	0,4	0,3	0,15	0,15
3	0,1	0,2	0,1	0,6
4	0,35	0,3	0,15	0,2
- $P(RA)=0,4 \cdot 0,6 = 0,24$, $P(RB)=0,6 \cdot 0,2 = 0,12$
 $P(VA)=0,4 \cdot 0,4 = 0,16$
- $P(1,1) = 1/5 \cdot 1/5 = 1/25$,
 $P(1,2) = 1/5 \cdot 2/5 = 2/25$
 $P(1,3) = 1/5 \cdot 2/5 = 2/25$
- $P(1,1) = 0$, $P(1,2) = 1/5 \cdot 1/2 = 0,1$
 $P(1,3) = 1/5 \cdot 1/2 = 0,1$
- Amb devolució $P(2 \text{ oros}) = 1/4 \cdot 1/4 = 1/16$,
sense devolució $P(2 \text{ oros}) = 1/4 \cdot 9/39$
- $P(R) = P(1) \cdot P(R/A) + P(2) \cdot P(R/B) =$
 $= 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,36$
 $P(\text{Verd}) = P(1) \cdot P(V/A) + P(2) \cdot P(V/B) =$
 $= 0,4 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,8 = 0,64$
- $P(R \text{ ó } N) = P(R) + P(N) =$
 $(0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,25) + (0 + 0,6 \cdot 0,5) = 0,65$.
- $P(A/V) = 0,2/0,35 = 0,57$
 $P(B/V) = 0,15/0,35 = 0,43$
- $p(1) = 1/4 \cdot 1/2 + 3/4 \cdot 2/6 = 3/8$,
 $P(\text{dues cares}/1) = 1/3$
- a) 0,2 b) 0,4 c) 0,5

Solucions de l'AUTOEVALUACIÓ

- $6/10=0,6$
- $6/20=0,3$
- $4/100=0,04$
- $15/20=0,75$
- $21/36=7/12$
- $21/40$
- $816/1600=0,51$
- 0,375
- $17/40$
- 0,2

No us descuideu d'enviar les activitats al tutor ►