10 Funciones exponenciales y logarítmicas

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Conocer las características de la función de proporcionalidad inversa y los fenómenos que describen.
- Hallar las asíntotas de una hipérbola.
- Reconocer y representar funciones exponenciales.
- Aplicar las funciones exponenciales al interés compuesto y otras situaciones.
- Calcular el logaritmo de un número.
- Interpretar las gráficas de las funciones logarítmicas.

Antes de empezar

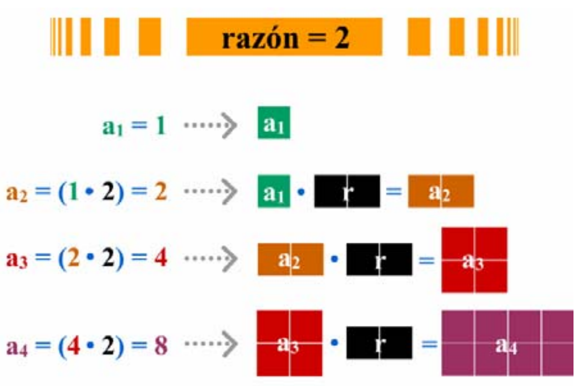
Recuerda

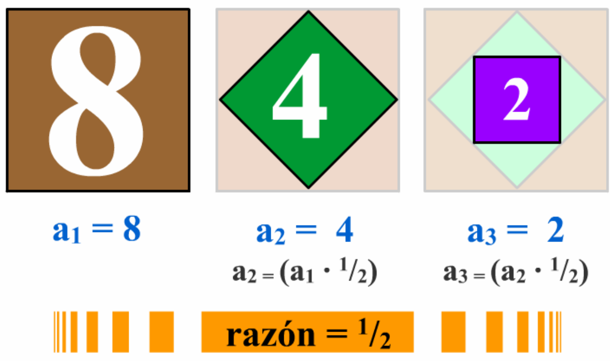
El curso pasado estudiaste las progresiones tanto aritméticas como geométricas, en el cuadro puedes repasar estas últimas, te vendrá bien para comprender mejor la función exponencial.

Progresiones geométricas

Una progresión geométrica está constituida por una secuencia de elementos en la que cada uno se obtiene del anterior multiplicándolo por una constante denominada razón de la progresión.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \ldots$	$3, 12, 48, 192 \ldots$
razón: d	razón: 4
a_1	$a_1 = 3$
$a_2 = a_1 \cdot d$	$a_2 = 3 \cdot 4 = 12$
$a_3 = a_2 \cdot d$	$a_3 = 12 \cdot 4 = 48$
$a_4 = a_3 \cdot d$	$a_4 = 48 \cdot 4 = 192$
...	...
$a_n = a_{n-1} \cdot d$	





Investiga

Benjamin Franklin, famoso científico y estadista, dejó un legado de 1000 libras a las ciudades de Boston y Filadelfia para que se prestasen a jóvenes aprendices al 5% anual. Según Franklin al cabo de 100 años se habrían convertido en 131000 libras, de las cuales 100000 serían para obras públicas y las 31000 restantes volverían a utilizarse como préstamos otros 100 años. ¿Calculó bien?.

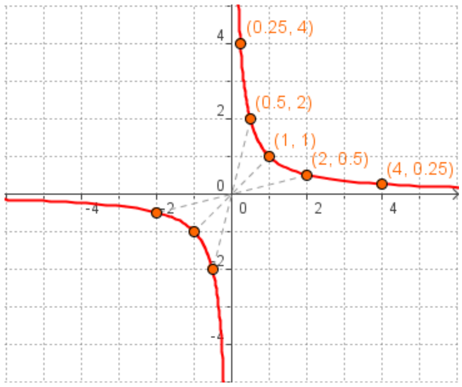
1. Funciones racionales

Función de proporcionalidad inversa

La función de proporcionalidad inversa relaciona dos magnitudes inversamente proporcionales.

Su expresión algebraica es: $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{x}}$

Su gráfica es una **hipérbola**. En la figura se puede ver el trazado de f(x)=1/x.

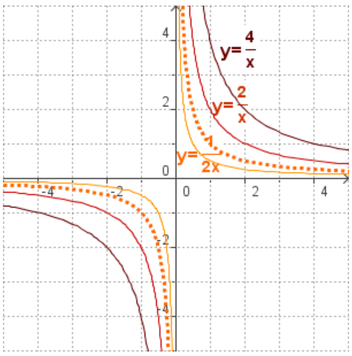


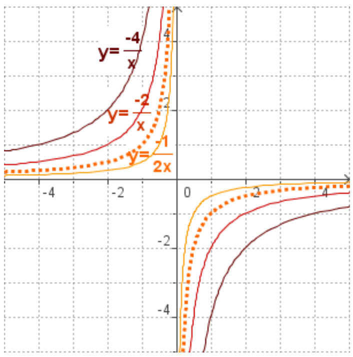
Haciendo una tabla de valores:

x	1	2	0,5	4	0.25	-1	-2	-0.5
f(x)	1	0,5	2	0,25	4	-1	-0,5	-2

- El **dominio** y el **recorrido** son todos los reales excepto el 0.
- Es una función **impar**: f(-x)=k/(-x)=-f(x).
- Si **k>0** la función es **decreciente** y su gráfica aparece en los cuadrantes 1º y 3º.
- Si **k<0** la función es **creciente** y su gráfica está en el 2º y 4º cuadrante.

A partir de ésta observa cómo cambia la gráfica al variar el valor de la constante k:





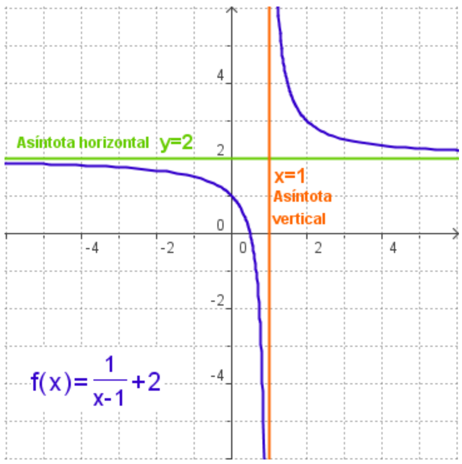
Las asíntotas

En la gráfica de la función f(x)=k/x se puede observar como las ramas de la hipérbola se aproximan a los ejes de coordenadas, son las asíntotas.

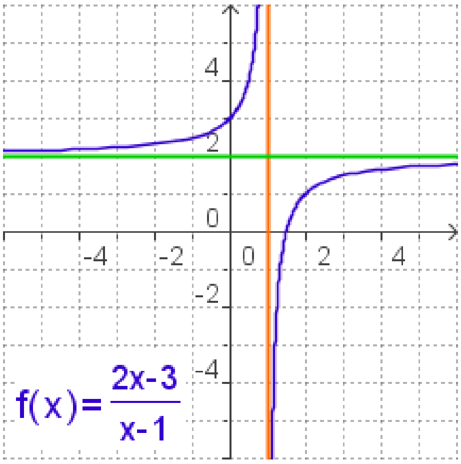
Cuando la gráfica de una función se acerca cada vez más a una recta, confundiéndose con ella, se dice que la recta es una **asíntota**.

Aunque estas rectas pueden llevar cualquier dirección en el plano aquí nos limitaremos a las:

- ✓ **Asíntotas verticales.** La recta **x=a** es una asíntota vertical de la función si se verifica que cuando el valor x tiende al valor a, el valor de f(x) tiende a valores cada vez más grandes, f(x)→+∞, ó más pequeños, f(x)→-∞.
- ✓ **Asíntotas horizontales.** La recta **y=b** es una asíntota horizontal de la función si se verifica que cuando x→+∞ ó x→-∞, el valor de f(x)→b.



- Asíntota vertical **x=1**
  - $x \to 1^+$ (por la derecha) $f(x) \to +\infty$
  - $x \to 1^-$ (por la izquierda) $f(x) \to -\infty$
- Asíntota horizontal **y=1**
  - $x \to +\infty$ $f(x) \to 2$
  - $x \to -\infty$ $f(x) \to 2$



Calcular las asíntotas

- El denominador es 0 si x=1, **AV: x=1**
- Al dividir numerador por denominador

$$\begin{array}{rl} \mathbf{2x\ -3} & \underline{|\ \mathbf{x-1}} \\ \underline{-2x\ +2} & \ \ 2 \quad \text{Cociente} \\ \text{Resto:}\ \ \mathbf{-1} & \end{array}$$

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{2x-3}}{\mathbf{x-1}} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{x-1}} + \mathbf{2} \quad \textbf{AH: y=2}$$

Y el resto indica la forma de la hipérbola, como la y=-1/x

Otras funciones racionales

Las funciones racionales son las que su expresión algebraica es un cociente de polinomios.

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{Q(x)}}$$

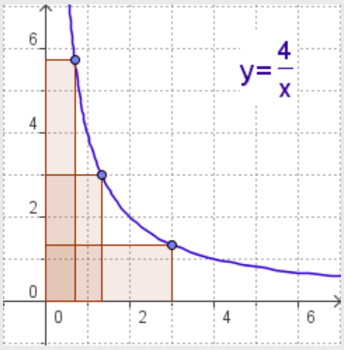
- Su **dominio** son todos los reales excepto los que anulan el denominador. En esos puntos hay una asíntota vertical.
- Si el grado del numerador y del denominador coinciden hay asíntota horizontal.
- Para calcular el punto de corte con el eje OY se calcula f(0), y para calcular los cortes con el eje OX se resuelve la ecuación P(x)=0.

La más sencilla de todas es la función de proporcionalidad inversa con la que se inicia este capítulo.

Calcular y dibujar las asíntotas, cuando tienen, permite saber cómo es la gráfica de la función con bastante facilidad. Para ello se hace el cociente entre numerador y denominador como se indica en el ejemplo de la izquierda.

EJERCICIOS resueltos

1. ¿Cuál es el área de los rectángulos de la figura?



Área = base x altura

En todos los rectángulos así dibujados

Área =x·y=4

2. La siguiente tabla corresponde a cantidades inversamente proporcionales, complétala y escribe la expresión algebraica de la función y=f(x).

x	f(x)
	-3
0.5	-12
	-1,2
-2	3
-3	
-1	

El producto de dos cantidades inversamente proporcionales es constante.

En este caso 0,5·(-12)=(-2)·3=**-6**

La función es $f(x)=\frac{-6}{x}$

x	f(x)
2	-3
0.5	-12
5	-1,2
-2	3
-3	**2**
-1	**6**

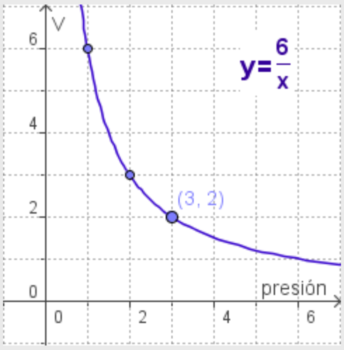
EJERCICIOS resueltos

3. Según la Ley de Boyle-Mariotte, la presión que ejerce un gas y el volumen que ocupa son inversamente proporcionales. A 25º determinada cantidad de gas ocupa un volumen de 2 litros y ejerce una presión de 3 atmósferas.

a) ¿Qué volumen ocupará cuando la presión ejercida sea de 1 atmósfera?.

b) ¿Qué presión ejercerá cuando el volumen sea 3 litros?.

c) Escribe la función presión → volumen y dibuja su gráfica



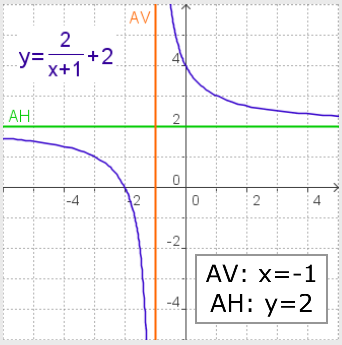
P·V=cte. en este caso P·V=6

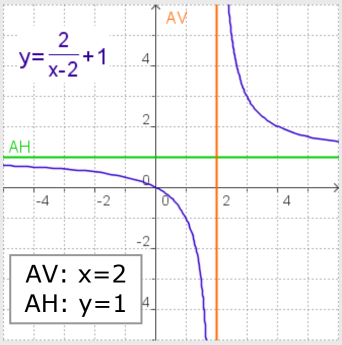
a) P=1 atm. V=6 litros

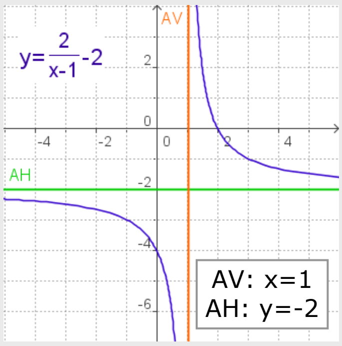
b) V=3 litros P=2 atm.

c) $f(x)=\frac{6}{x}$

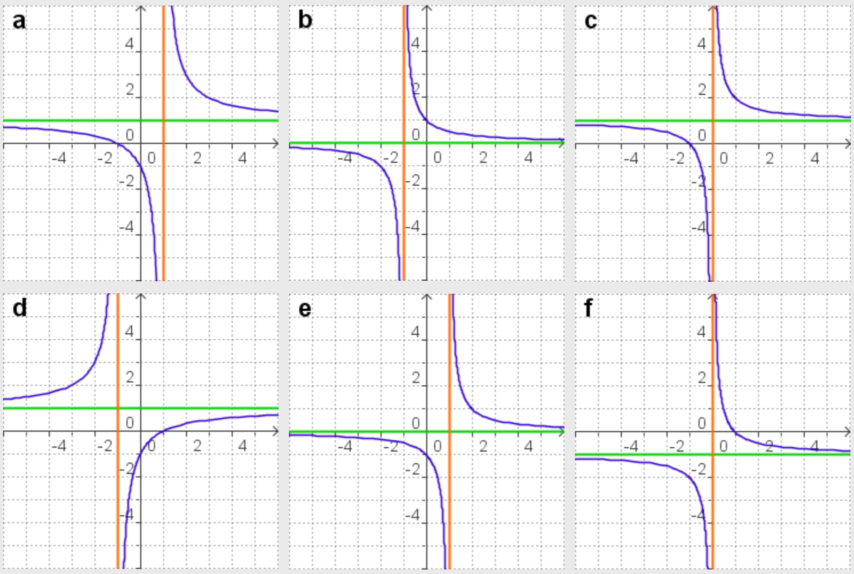
6. En las siguientes funciones, dibujas las asíntotas y escribe su ecuación.







7. Decide qué grafica corresponde a cada función:



1) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ → **e**

2) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ → **b**

3) $f(x)=\frac{x+1}{x}$ → **c**

4) $f(x)=\frac{1-x}{x}$ → **f**

5) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ → **a**

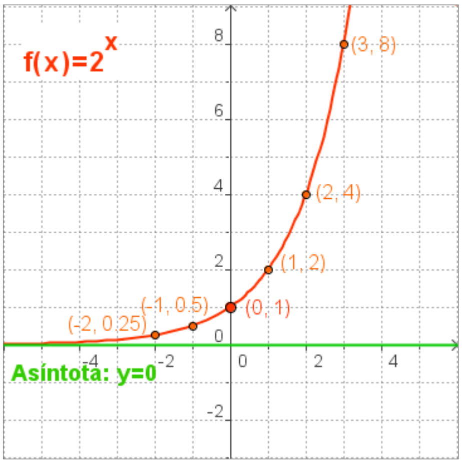
6) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ → **d**

2. Funciones exponenciales

La función exponencial

La función exponencial es de la forma **$y=a^x$**, siendo **a** un número real positivo.

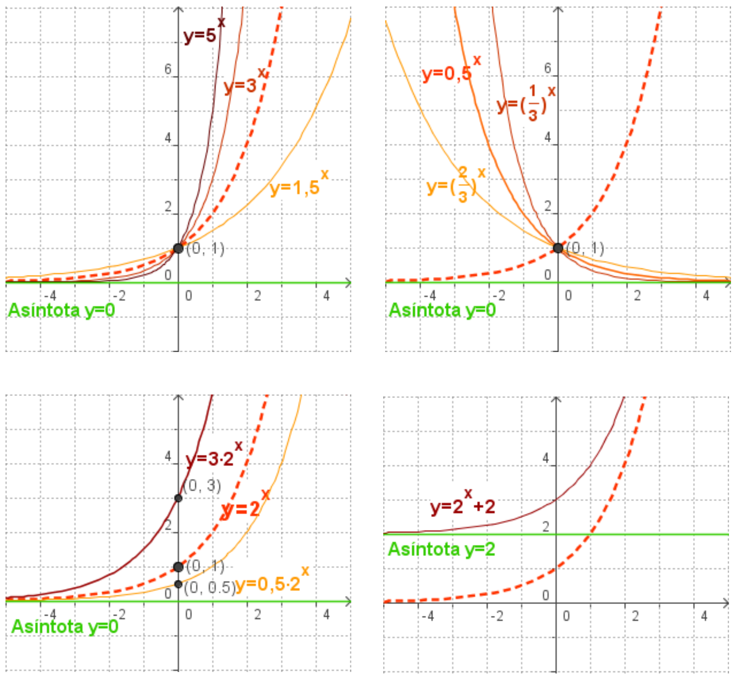
En la figura se ve el trazado de la gráfica de $y=2^x$.



x	-3	-2	-1	**0**	1	2	3	-0.5
y	0,125	0,25	0,5	**1**	2	4	8	-2

- El **dominio** son todos los reales y el **recorrido** son los reales positivos.
- Es **continua**.
- Si **$a>1$** la función es **creciente** y si **$0<a<1$** es **decreciente**.
- Corta al eje OY en (0,1).
- El eje OX es **asíntota**.
- La función es **inyectiva**, esto es si **$a^m=a^n$** entonces **$m=n$**.

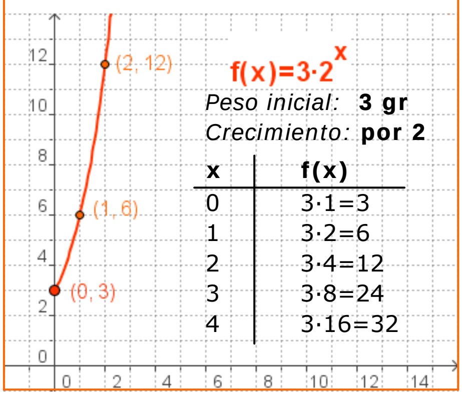
En los gráficos inferiores se puede ver como cambia la gráfica al variar a. Observa que las gráficas de **$y=a^x$** y de **$y=(1/a)^x=a^{-x}$** son simétricas respecto del eje OY.



En las gráficas de la derecha se puede ver como al multiplicar por una constante **$y=k\cdot a^x$** el punto de corte con el eje OY es **(0,k)**.

Al sumar (o restar) una constante b la gráfica se desplaza hacia arriba (o hacia abajo) b unidades y la asíntota horizontal pasa a ser **y=b**.

En un laboratorio tienen un cultivo bacteriano, si su peso se multiplica por 2 cada día, ¿cuál es su crecimiento si el peso inicial es 3 gr?



$f(x)=3\cdot 2^x$

Peso inicial: **3 gr**

Crecimiento: **por 2**

x	f(x)
0	3·1=3
1	3·2=6
2	3·4=12
3	3·8=24
4	3·16=32

Crecimiento exponencial

La función exponencial se presenta en multitud de fenómenos de crecimiento animal, vegetal, económico, etc. En todos ellos la variable es el tiempo.

En el crecimiento exponencial, cada valor de **y** se obtiene multiplicando el valor anterior por una cantidad constante **a**.

Donde **k** es el valor inicial (para t=0), **t** es el tiempo transcurrido y **a** es el factor por el que se multiplica en cada unidad de tiempo.

Si **$0<a<1$** se trata de un decrecimiento exponencial.

Aplicaciones

La función exponencial sirve para describir cualquier proceso que evolucione de modo que el aumento (o disminución) en un pequeño intervalo de tiempo sea proporcional a lo que había al comienzo del mismo.

A continuación se ven tres aplicaciones:

- Crecimiento de poblaciones.
- Interés del dinero acumulado.
- Desintegración radioactiva.

✓ Interés compuesto

En el interés compuesto los intereses producidos por un capital, C_0 se van acumulando a éste, de tiempo en tiempo, para producir nuevos intereses.

Los intervalos de tiempo, al cabo de los cuales los intereses se acumulan al capital, se llaman periodos de capitalización o de acumulación. Si son t años, r es el rédito anual (interés anual en %) el capital final obtenido viene dado por la fórmula:

$$C_F = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

Si se consideran n periodos de tiempo, (n=12 si meses, n=4 si trimestres, n=365 si días,...) la fórmula anterior queda:

$$C_F = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n \cdot 100}\right)^{nt}$$

Se colocan 5000 € al 6% anual. ¿En cuánto se convertirán al cabo de 5 años?

- *Si los intereses se acumulan anualmente*

  $C_F = 5000 \cdot 1.06^5 = 6691{,}13$ €

- *Si los intereses se acumulan mensualmente*

  $C_F = 5000 \cdot \left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{12 \cdot 5} =$

  $= 5000 \cdot 1{,}005^{60} = 6744{,}25$ €

- *Si los intereses se acumulan trimestralmente*

  $C_F = 5000 \cdot \left(1 + \frac{6}{400}\right)^{4 \cdot 5} =$

  $= 5000 \cdot 1{,}015^{20} = 6734{,}27$ €

✓ Crecimiento de poblaciones

El crecimiento vegetativo de una población viene dado por la diferencia entre nacimientos y defunciones.

Si inicialmente partimos de una población P_0, que tiene un índice de crecimiento i (considerado en tanto por 1), al cabo de t años se habrá convertido en

$$\mathbf{P = P_0 \cdot (1+i)^t}$$

Un pueblo tiene 600 habitantes y su población crece anualmente un 3%.

- *¿Cuántos habitantes habrá al cabo de 8 años?*

  $P = 600 \cdot 1.03^8 \approx 760$

✓ Desintegración radiactiva

Las sustancias radiactivas se desintegran con el paso del tiempo. La cantidad de una cierta sustancia que va quedando a lo largo del tiempo viene dada por:

$\mathbf{M = M_0 \cdot a^t}$ — $\mathbf{M_0}$ es la masa inicial, $\mathbf{0<a<1}$ es una constante que depende de la sustancia y de la unidad de tiempo que tomemos.

La rapidez de desintegración de las sustancias radiactivas se mide por el "*periodo de desintegración*" que es el tiempo en que tarda en reducirse a la mitad.

Un gramo de estroncio-90 se reduce a la mitad en 28 años, si en el año 2000 teníamos 20 gr y tomamos como origen de tiempo el año 2000.

- *La función es:*

  $M(x) = 20 \cdot 0{,}5^{\frac{x}{28}} = 20 \cdot 0{,}9755^x$

- *En el año 2053 quedará:*

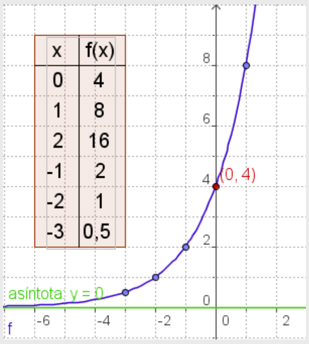
  $M = 20 \cdot 0{,}9755^{53} = 5{,}38$ gr

EJERCICIOS resueltos

8. Representa y estudia las funciones

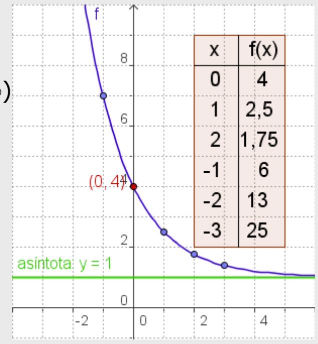
a) $f(x)=4\cdot 2^x$

Dominio= IR
Recorrido=$(0,+\infty)$
Asíntota: y=0
Corte OY: (0,4)
Creciente



b) $f(x)=2\cdot 3^{-x}+1$

Dominio= IR
Recorrido=$(1,+\infty)$
Asíntota: y=1
Corte OY: (0,4)
Decreciente



9. Construye una tabla de valores de una función exponencial en cada caso y escribe la expresión algebraica.

a) f(-2)=2/9
y constante de crecimiento 3

x	f(x)
-2	**2 / 9**
-1	2/3
0	2
1	6
2	18
3	54

f(-2)=2/9
f(-1)=3·2/9=2/3
f(0)=3·2/3=2
f(1)=3·2=6
y así sucesivamente

$f(x)=2\cdot 3^x$

b) f(0)=3
y constante de decrecimiento 1/4

x	f(x)
-2	48
-1	12
0	**3**
1	3/4
2	3/16
3	3/64

f(0)=3

$f(1)=3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$f(2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

y así sucesivamente

$f(x)=3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x=3\cdot 4^{-x}$

10. La tabla corresponde, en cada caso, a una función exponencial. Escribe la fórmula.

a)

x	f(x)
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27

$y=3^x$

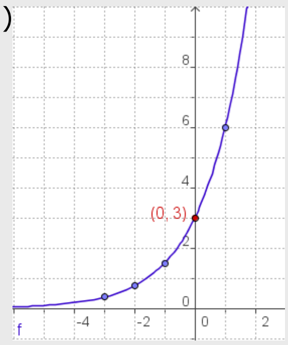
b)

x	f(x)
-2	25
-1	5
0	1
1	1/5
2	1/25
3	1/125

$f(x)=(1/5)^x=5^{-x}$

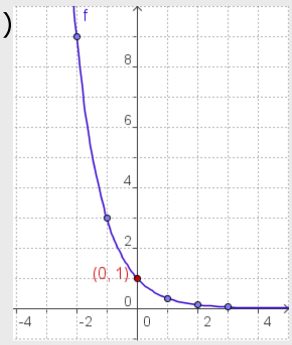
11. Indica si el gráfico corresponde a una función con crecimiento exponencial o con decrecimiento. Escribe la función.

a)



Observa la gráfica
f(0)=3
f(1)=6=3·2
f(-1)=1,5=3/2
La función es:
$f(x)=3\cdot 2^x$
y es creciente

b)



Observa la gráfica
f(0)=1
f(-1)=3
$f(-2)=9=3^2$
La función es:
$f(x)=(1/3)^x=3^{-x}$
y es decreciente

3. Funciones logarítmicas

La función inversa de la exponencial

Dada una función *inyectiva*, y=f(x), se llama **función inversa** de f a otra función, g, tal que g(y)=x. En la figura adjunta se puede ver la inversa de la función exponencial.

Para cada x se obtiene a^x. Al valor obtenido lo llamamos y o f(x). La función inversa de la exponencial es la que cumple que **g(y)=x**.

Esta función se llama **función logarítmica** y, como puedes observar, es simétrica de la función exponencial con respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

La función logarítmica

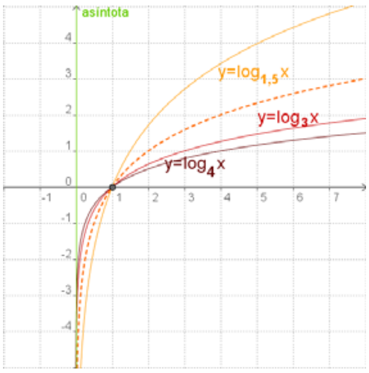
Es la función inversa de la función exponencial y se denota de la siguiente manera:

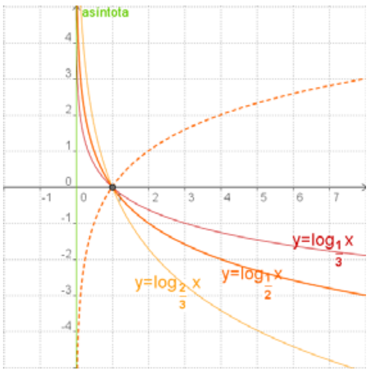
$y = \log_a x$, con a>0 y distinto de 1.

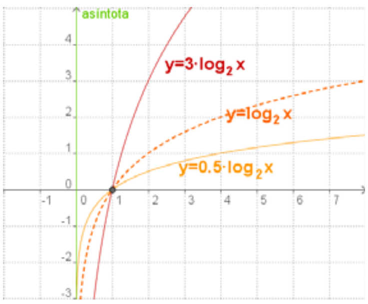
En la figura se representa la gráfica de $y=\log_2 x$ de forma similar a como se hizo con la exponencial. Sus propiedades son "*simétricas*".

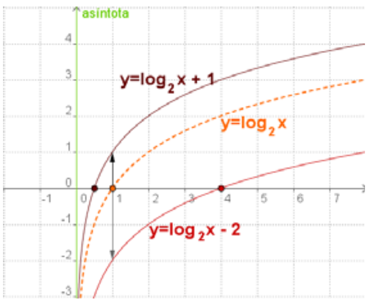
x	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
f(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3

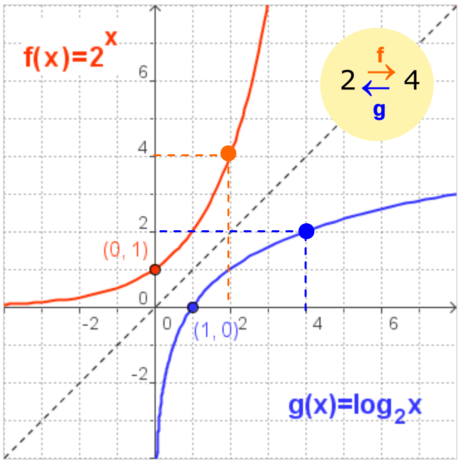
En los gráficos inferiores se puede ver como cambia la gráfica al variar a.

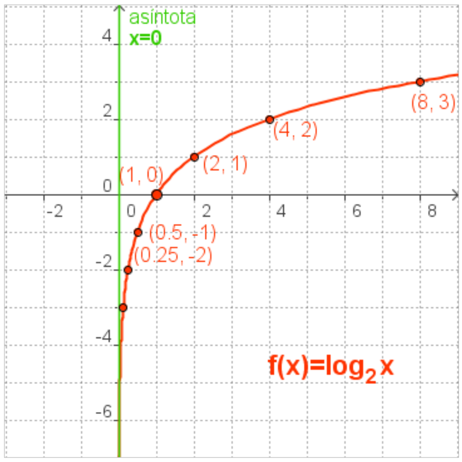












- El **dominio** son los reales positivos y el **recorrido** son todos los reales.
- Es **continua**.
- Si **a>1** la función es **creciente** y si **0<a<1** es **decreciente**.
- Corta al eje OX en (1,0).
- El eje OY es **asíntota**.
- La función es **inyectiva**, esto es si $\mathbf{a^m=a^n}$ entonces **m=n**.

En las gráficas de la derecha se puede ver como al multiplicar por una constante $\mathbf{y=k\cdot\log_a x}$ cambia la rapidez con que la función crece o decrece (k<0).

Al sumar (o restar) una constante b la gráfica se desplaza hacia arriba (o hacia abajo) b unidades, cambiando el punto de corte con el eje de abscisas.

$$\log_2 128 = 7 \longleftrightarrow 2^7 = 128$$

$$\log_3 \frac{1}{243} = -4 \longleftrightarrow 3^{-4} = \frac{1}{243}$$

$$\log_{1/2} 8 = -3 \longleftrightarrow (1/2)^{-3} = 8$$

$$\log_{1/3} \frac{1}{9} = 2 \longleftrightarrow (1/3)^2 = \frac{1}{9}$$

Los logaritmos

Dados dos números reales positivos, **a** y **b** (**a**≠**1**), llamamos **logaritmo en base a de b** al número al que hay que elevar **a** para obtener **b**.

La definición anterior indica que:

$\log_a b = c$ equivale a $a^c = b$

Fíjate en los ejemplos de la izquierda.

Sean: $x=\log_a b$ $\quad a^x=b$
$y=\log_a c$ $\quad a^y=c$
$z=\log_a(b\cdot c)$ $\quad a^z=b\cdot c$

- $a^x\cdot a^y=a^{x+y}=a^z \Rightarrow z=x+y$
- $a^x/a^y=a^{x-y}=a^z \Rightarrow z=x-y$
- $(a^x)^m=a^{x\cdot m}=a^z \Rightarrow z=x\cdot m$

Propiedades de los logaritmos

- Logaritmo del producto: $\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$
- Logaritmo del cociente: $\log_a \frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$
- Logaritmo de una potencia: $\log_a(b^m)=m\cdot\log_a b$
- En cualquier base: $\log_a 1=0$ ya que $a^0=1$
  $\log_a a=1$ ya que $a^1=a$

Con la calculadora

Para calcular logaritmos

- log 9,043
  Teclea 9 . 043 log
  Aparecerá: 0.9563125

Compruébalo con la tecla 10^x

  Teclea INV 10^x
  Aparecerá: 9.043

Si introduces:

- log 904,3
  Teclea 904 . 3 log
  Aparecerá: 2.9563125

Observa: 904,3=9,043·100
log904,3=log9,043 +2

Cambio de base:

- $\log_3 9043$
  Teclea 9043 log
  Aparecerá: 3.9563125
  Teclea ÷ 3 log
  Aparecerá: 0.4771212
  Teclea = y sale el resultado:
  8,2920484

Logaritmos decimales

Son los de base **10**, son los más usados y por este motivo no suele escribirse la base cuando se utilizan.

$\log 10 = \log 10^1=1$

$\log 100 = \log 10^2=2$

$\log 1000 = \log 10^3 = 3$

$\log 10000 = \log 10^4 = 4$, ...etc

Observa que entonces el log de un número de 2 cifras, comprendido entre 10 y 100, es 1,... ; el log de los números de 3 cifras será 2,... ; etc.

Por otra parte:

$\log 0{,}1 = \log 10^{-1} = -1$

$\log 0{,}01 = \log 10^{-2} = -2$

$\log 0{,}001 = \log 10^{-3} = -3$, ...etc

Entonces el log de un número comprendido entre 0,01 y 0,1 será -1,...; el de uno comprendido entre 0,001 y 0,01 será -2,..., etc.

Cambio de base

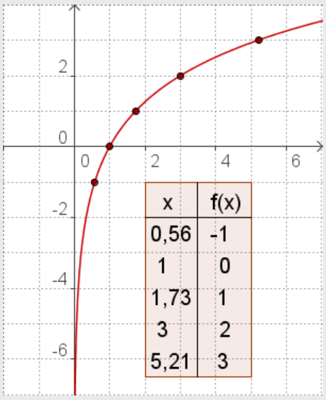
Las calculadoras permiten calcular dos tipos de logaritmos: decimales (base=10) y neperianos o naturales (base=e), que se estudian en cursos posteriores. Cuando queremos calcular logaritmos en cualquier otra base tenemos que recurrir a la fórmula del cambio de base: $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

EJERCICIOS resueltos

12. Representa y estudia las funciones

a) $f(x)=2\cdot\log_3 x$

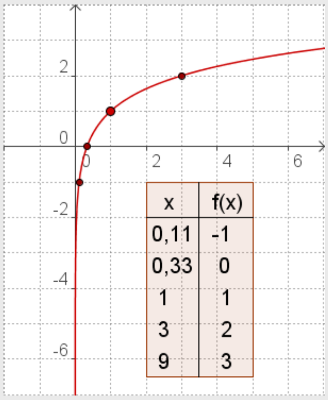
Dominio=$(0,+\infty)$
Recorrido= IR
Asíntota: x=0
Corte OX: (1,0)
Creciente



x	f(x)
0,56	-1
1	0
1,73	1
3	2
5,21	3

b) $f(x)=\log_3 x+1$

Dominio=$(0,+\infty)$
Recorrido= IR
Asíntota: x=0
Corte OX: (1/3,0)
Creciente



x	f(x)
0,11	-1
0,33	0
1	1
3	2
9	3

13. Calcula x en cada caso aplicando la definición de logaritmo:

a) $\log_6(1/6)=x$	$x=-1$	$6^{-1}=1/6$
b) $\log_4 2=x$	$x=1/2$	$4^{1/2}=2$
d) $\log_5 125=x$	$x=3$	$5^3=125$
f) $\log_{1/8} 1=x$	$x=0$	$(1/8)^0=1$
c) $\log_3 81=x$	$x=4$	$3^4=81$
g) $\log_{1/5} 25=x$	$x=-2$	$(1/5)^{-2}=25$
d) $\log_3(1/9)=x$	$x=-2$	$3^{-2}=1/9$
h) $\log_{1/2}(1/16)=x$	$x=4$	$(1/2)^4=1/16$

14. Sabiendo que log2=0,301030 calcula sin ayuda de la calculadora:

a) log40 $= \log(4\cdot10) = \log(2^2\cdot10) = \log2^2+\log10 = 2\cdot\log2+\log10 =$
$= 2\cdot0{,}301030+1 = 1{,}602060$

b) log1,6 $= \log(16/10) = \log(2^4/10) = \log2^4-\log10 = 4\log2-\log10 =$
$= 4\cdot0{,}301030-1 = 0{,}204120$

c) log 0,125 $= \log(125/1000) = \log 53/1000) = 3(\log5 - \log1000 = 3\log(10/2) - 3 =$
$= 3(\log10-\log2)-3 = 3-3\log2-3 = -3\cdot0{,}301030 = -0{,}903090$

15. Con la calculadora halla los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 23{,}721 = \dfrac{\log 23{,}721}{\log 2} = 4{,}5681$

b) $\log_3 25678{,}34561 = \dfrac{\log 2{,}3456}{\log 3} = 0{,}7760$

c) $\log_5 0{,}37906 = \dfrac{\log 0{,}37906}{\log 5} = -0{,}6027$

d) $\log_7 0{,}37906 = \dfrac{\log 0{,}37906}{\log 7} = -0{,}4985$

RECUERDA:

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

Para practicar

1. Envasamos 276 litros de agua en botellas iguales. Escribe la función que relaciona el número de botellas y su capacidad.

2. Un móvil recorre una distancia de 130 km con velocidad constante. Escribe la función velocidad→tiempo, calcula el tiempo invertido a una velocidad de 50 km/h, y la velocidad si el tiempo ha sido 5 horas.

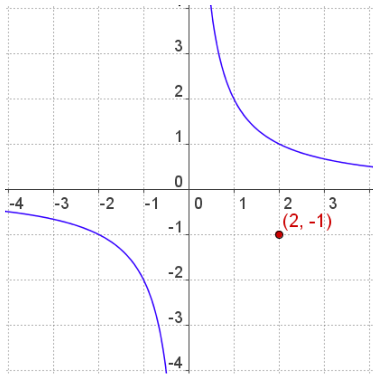
3. Un grifo con un caudal de 8 litros/min tarda 42 minutos en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaría si el caudal fuera de 24 litros/min?. Escribe la función caudal→tiempo.

4. Calcula las asíntotas de las funciones siguientes:

   a) $f(x)=\dfrac{2x+4}{x+3}$ b) $f(x)=\dfrac{x-1}{x-3}$

   c) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$ d) $f(x)=\dfrac{-x}{x+2}$

5. Escribe la ecuación de la función cuya gráfica es una hipérbola como la de la figura con el centro de simetría desplazado al punto (2,-1).



6. Los costes de edición, en euros, de x ejemplares de un libro vienen dados por y=21x+24 (x>0). ¿Cuánto cuesta editar 8 ejemplares?, ¿y 80 ejemplares?. Escribe la función que da el coste por ejemplar. Por muchos ejemplares que se publiquen, ¿cuál es el coste unitario como mínimo?.

7. En qué se convierte al cabo de 15 años un capital de 23000€ al 5,5% anual?

8. Un capital colocado a interés compuesto al 2% anual, se ha convertido en 3 años en 9550,87€. ¿Cuál era el capital inicial?

9. Un capital de 29000€ colocado a interés compuesto se ha convertido al cabo de 4 años en 31390,53 €. ¿Cuál es el rédito (interés anual) a que ha estado colocado?

10. Un capital de 7000€, colocado a interés compuesto del 2% anual, se ha convertido al cabo de unos años en 8201,61€. ¿Cuántos años han transcurrido?

11. ¿Cuántos años ha de estar colocado cierto capital, al 3% anual, para que se duplique.

12. El periodo de desintegración del Carbono 14 es 5370 años. ¿En qué cantidad se convierten 10 gr al cabo de 1000 años?

13. ¿Cuántos años han de pasar para que una muestra de 30 gr de C14 se convierta en 20,86 gr.? *(Periodo de desintegración del C14 5370 años).*

14. Una muestra de 60 gr. de una sustancia radiactiva se convierte en 35,67 gr en 30 años. ¿Cuál es el periodo de desintegración?.

15. El tamaño de cierto cultivo de bacterias se multiplica por 2 cada 30 minutos. Si suponemos que el cultivo tiene inicialmente 5 millones de bacterias, ¿dentro de cuántas horas tendrá 320 millones de bacterias?.

16. El tamaño de cierto cultivo de bacterias se multiplica por 2 cada 20 minutos, si al cabo de 3 horas el cultivo tiene 576 millones de bacterias, ¿cuántas había en el instante inicial?

17. Calcula el número:

a) cuyo logaritmo en base 6 es 3.

b) cuyo logaritmo en base 4 es -3.

c) cuyo logaritmo en base 10 es 2.

d) cuyo logaritmo en base 1/2 es -3.

e) cuyo logaritmo en base 1/5 es 2.

18. ¿En qué base?

a) el logaritmo de 0,001 es -3.

b) el logaritmo de 243 es 3.

c) el logaritmo de 8 es 1.

d) el logaritmo de 1/81 es -4.

e) el logaritmo de 49 es 2.

19. Calcula mentalmente:

a) el logaritmo en base 2 de 32.

b) el logaritmo en base 5 de 125.

c) el logaritmo en base 3 de 1/9.

d) el logaritmo en base 7 de 1.

e) el logaritmo en base 6 de 216.

20. Sabiendo que el log2=0,3010 y el log3=0,4771, calcula:

a) log 16

b) log 512

c) log(16/81)

d) log 24

e) log 72

21. Utiliza la calculadora para averiguar el valor de:

a) $\log_7 12456{,}789$

b) $\log_5 5123{,}4345$

c) $\log_9 47658{,}897$

d) $\log_3 23{,}146$

e) $\log_6 1235{,}098$

Cuando la x está en el exponente

- Resuelve la ecuación: $25^{2x-3}=125$
  $25=5^2$ y $125=5^3$, entonces $5^{2(2x-3)}=5^3$
  igualando los exponentes $2(2x-3)=3 \Rightarrow x=9/4$
- Calcula x en $3^x=14$
  Tomando logaritmos: $\log 3^x=\log 14$
  $x\log 3=\log 14$ luego $x=\dfrac{\log 14}{\log 3}=2{,}40$

22. Resuelve las ecuaciones exponenciales:

a) $32^{-9x+9}=16$

b) $27^{2x+3}=9^3$

c) $4^{-3x+8}=8$

d) $9^{8x-7}=1$

e) $25^{-5x-5}=1$

23. Calcula el valor de x:

a) $7^x=5$

b) $5^x=7$

c) $2{,}13^x=4{,}5$

Ecuaciones con logaritmos

Resuelve la ecuación: $4\cdot\log x=2\cdot\log x+\log 4+2$

$4\cdot\log x - 2\cdot\log x=\log 4+\log 100$

$2\cdot\log x=\log 400 \quad \log x^2=\log 400$

$x^2=400 \Rightarrow x=\pm 20$

24. Aplicando las propiedades de los logaritmos resuelve las ecuaciones:

a) $\log(32+x^2) - 2\cdot\log(4-x) = 0$

b) $2\cdot\log x - \log(x-16) = 2$

c) $\log x^2 - \log\dfrac{10x+11}{10} = -2$

d) $5\cdot\log\dfrac{x}{2}+2\cdot\log\dfrac{x}{3}=3\cdot\log x-\log\dfrac{32}{9}$

25. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 2\cdot\log x - 3\cdot\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 70 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$

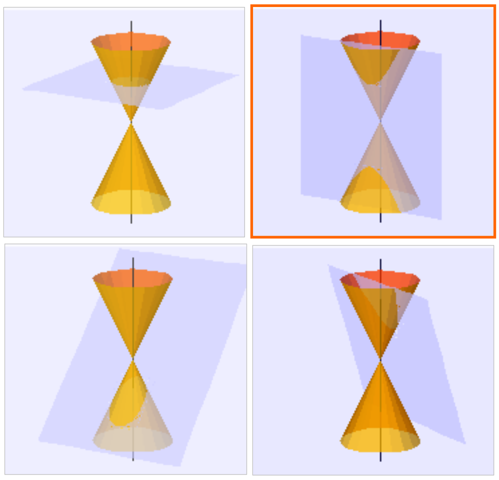
Para saber más

Los cálculos de Franklin

Ahora ya sabes resolver el problema propuesto al principio del tema

1000 libras al **5%** anual durante **100** años se convierten en
$1000\cdot 1{,}05^{100}$=131.825,67 libras

31000 libras al **5%** anual en **100** años se convierten en
$31000\cdot 1{,}05^{100}$= 4076539 libras



Otras hipérbolas

La hipérbola es una cónica, junto a la circunferencia, la elipse y la parábola, son curvas que se originan al cortar un cono por un plano.

También es el lugar geométrico de los puntos del plano, cuya diferencia de distancias a dos fijos, los focos, es constante.

El número

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Esta expresión da lugar a uno de los números más importantes de las matemáticas, el **número e**, se trata de un nº irracional, de valor aproximado 2,7182818284590452...

Base de la función exponencial $y=e^x$ y de los logaritmos neperianos o naturales, aparece en muchas situaciones de la vida real.

Una de la curvas en cuya fórmula aparece el **número e** es la catenaria, curva que forma una cadena cuando se cuelga de sus extremos. Puedes verla en los cables del tendido eléctrico y en numerosos elementos arquitectónicos, arcos, puentes,... aunque quizás la confundas con una parábola ya que en los alrededores del vértice sus valores son muy próximos

¿Cuántas veces es mayor la intensidad de un terremoto de magnitud 7,9 en la escala Richter que uno de magnitud 5?.

Las medidas de la escala Richter son logaritmos decimales: 7,9-5=2,9
$10^{2,9}$=794 veces

Terremotos, música y champú

¿Qué tienen en común cosas tan dispares? pues precisamente los logaritmos.

Cuando se pretende representar medidas que toman valores muy dispares, desde muy pequeños a muy grandes, se emplea la escala logarítmica. Algunos ejemplos en que se utiliza:

- La escala Richter que mide la intensidad de los terremotos.
- La intensidad del sonido en belios o decibelios, o el mismo pentagrama.
- El ph de una sustancia
- La magnitud de las estrellas.

Recuerda lo más importante

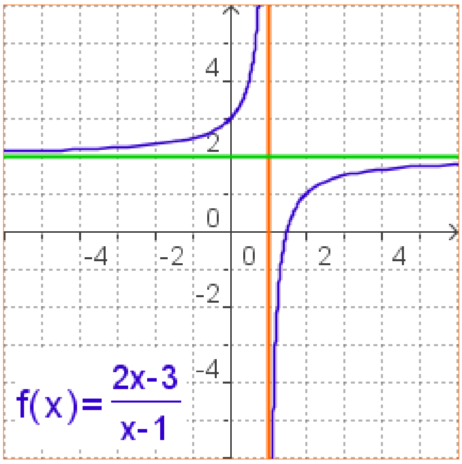
Funciones racionales

Son las que su expresión algebraica es el cociente entre dos polinomios.

✓ Una **función de proporcionalidad inversa**, **y=k/x**, relaciona dos variables inversamente proporcionales. Su gráfica es una **hipérbola**, es discontinua en x=0, decreciente si k>0 y creciente si k<0.

Cuando la gráfica de una función se acerca cada vez más a una recta, confundiéndose con ella, se dice que la recta es una **asíntota**.

✓ Para calcular las asíntotas de una función racional en la que el numerador y denominador tienen el mismo grado, se hace la división, el cociente es la asíntota horizontal. Hay asíntota vertical en los puntos que anulan el denominador siempre que no anulen también el numerador.



Funciones exponenciales

Son de la forma $y=a^x$, con a>0.

- Su dominio es IR.
- Es continua.
- Si a>1 es creciente y decreciente si 0<a<1.
- Corta al eje OY en (0,1) y pasa por (1,a)
- El eje OX es **asíntota** horizontal.

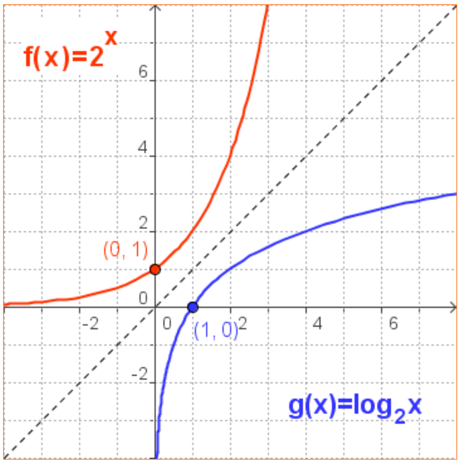
Funciones logarítmicas

Son las que asocian a cada número x su logaritmo en una cierta base, a, $y=\log_a x$.

- Su dominio son los reales positivos y el recorrido es IR
- Es continua
- Si a>1 es creciente y decreciente si 0<a<1.
- Corta al eje OX en (1,0) y pasa por (a,1)
- El eje OY es **asíntota** vertical.

✓ Dados dos números reales positivos, **a** y **b** (**a≠1**), llamamos **logaritmo en base a de b** al número al que hay que elevar **a** para obtener **b**.

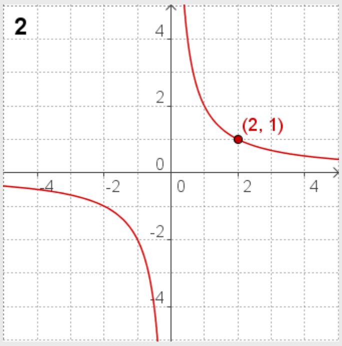
$\log_a b=c$ equivale a $a^c=b$

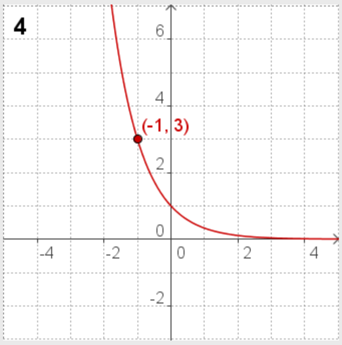


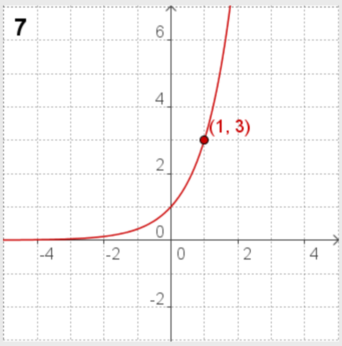
Propiedades de los logaritmos

- Logaritmo del producto
  $\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$
- Logaritmo del cociente
  $\log_a(b/c)=\log_a b-\log_a c$
- Logaritmo de una potencia
  $\log_a(b^m)=m\cdot\log_a b$
- En cualquier base:
  $\log_a 1=0$ y $\log_a a=1$

Autoevaluación







1. ¿Cuál es la función de proporcionalidad inversa que a x=1,25 le hace corresponder y=4

2. Escribe la expresión algebraica de la función de la gráfica.

3. Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \frac{-2x}{x-1}$.

4. Escribe la expresión algebraica de la función exponencial de la gráfica

5. Calcula en cuánto se convierte un capital de 9000 € colocado al 4,5% anual durante 3 años.

6. La población de una especie en extinción se reduce a la mitad cada año. Si al cabo de 9 años quedan 12 ejemplares, ¿cuál era la población inicial?

7. Escribe la expresión de la función logarítmica que es la inversa de la exponencial de la gráfica.

8. Calcula $\log_5 \frac{1}{3125}$

9. Sabiendo que log3=0,4771 y sin usar la calculadora, calcula log 8,1

10. Con la calculadora halla el valor de x en $1{,}97^x=215$. Redondea el resultado a centésimas.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. y=276/x
2. y=130/x ; tiempo=2,6 ; v=26
3. 14 min; y=336/x
4. a) x=-3 y=2
   b) x=3 y=1
   c) x=0 y=2
   d) x=-2 y=-1
5. $y=\frac{2}{x-2}-1$
6. 8: 184€; 80: 1704€
   f(x)=21+24/x; 21€ mínimo
7. 51347 €
8. 9000 €
9. 2%
10. 15 años
11. 23 años
12. 8,86 gr
13. 3000 años
14. 40 años
15. 3 horas
16. 9 millones
17. a) 216 b) 1/256
    c) 100 d) 8 e) 1/25
18. a) 10 b) 3
    c) 8 d) 3 e) 7
19. a) 5 b) 3 c) -2
    d) 0 e) 3
20. a) 1,2040 b) 2,7090
    c) -0,7044 d) 1,3801 e) 1,8572
21. a) 4,8461 b) 5,3072
    c) 4,9025 d) 2,8598
    e) 3,9731
22. a) x=49/45 b) -3
    c) 13/6 d) 7/8 e) -1
23. a) x=0,827 b) x= 1,209
    c) x=1,989
24. a) x=-2 b) No tiene solución
    c) 80 y 20 d) ±3 (Sólo vale +3)
25. a) x=100 y=0,1
    b) (x=50, y=20) (x=20, y=50)

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. f(x)= 5/x
2. f(x)= 2/x
3. x=1 y=-2
4. $f(x)=(1/3)^x = 3^{-x}$
5. 10270,50 €
6. 6144
7. $y=\log_3 x$
8. -5
9. 0,9084
10. 7,92

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

cidead
Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia

ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:		Curso: **4º**
Quincena nº: **10**	Asignatura: **Matemáticas B**	
Fecha:	Profesor de la asignatura:	

1. ¿Para qué valores de x la función indicada es decreciente?:

a) $f(x) = \frac{3}{x}$

b) $f(x) = -\frac{3}{x}$

2. Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \frac{6}{x-4}$

3. Al estudiar cómo afecta la falta de determinado nutriente a un cultivo bacteriano se observa que sigue una función exponencial decreciente que pasa por el punto (2, 1/16). ¿Cuál es la fórmula de la función?

4. Calcula x en cada caso:

a) $\log_x 16 = -2$ x =

b) $\log_2 32 = x$ x =

c) $\log_3 x = -2$ x =

cidead@mec.es

http://cidead.cnice.mec.es

C/ TORRELAGUNA, 58
28027 MADRID
TEL: 91 3778300
FAX: 91 3778314