7 Semellanza e trigonometría

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Recoñecer triángulos semellantes.
- Calcular distancias inaccesibles, aplicando a semellanza de triángulos.
- Nocións básicas de trigonometría.
- Calcular a medida de todos os lados e os ángulos dun triángulo rectángulo a partir de dous datos.

Antes de empezar.

1.Semellanza..... páx. 114
Teorema de Tales
Triángulos semellantes
Teorema de Pitágoras
Cálculo de distancias

2.Razóns trigonométricas..... páx. 118
Definición
Relacións fundamentais

3.Resolución de triángulos rectángulos..... páx. 121
Dous lados
Un cateto e un ángulo agudo
Hipotenusa e un ángulo agudo

Exercicios para practicar

Para saber máis

Resumo

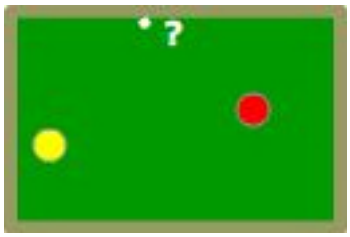
Autoavaliación

Antes de empezar

Investiga xogando

Como facer carambola a unha banda?

Se xogaches ao billar, saberás que facer carambola a unha banda significa que a bóla lanzada debe dar unha vez no marco da mesa antes de facer carambola. Abonda aplicar a semellanza para conseguilo, como?



Cara a onde debemos dirixir a bóla amarela para que despois de rebotar na banda vaia á bóla vermella?

1. Semellanza

Teorema de Tales

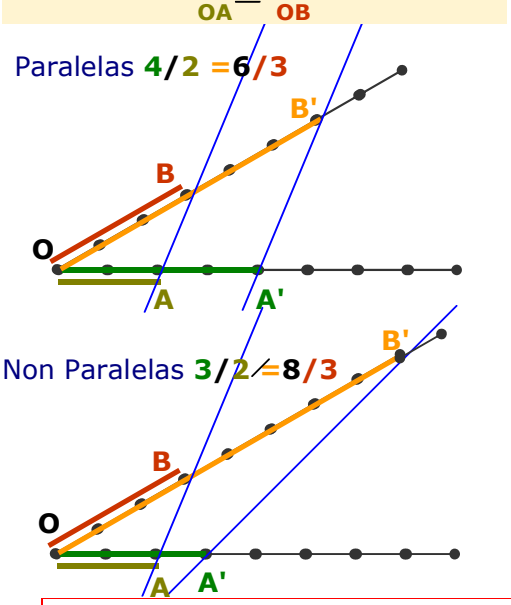
O teorema de Tales pódese ver na dereita, afirma que cando se cortan dúas semirrectas con dúas rectas paralelas, os segmentos que se obteñen en cada semirrecta gardan a mesma proporción.

Este teorema indícanos que se dous triángulos teñen os ángulos iguais, os lados son proporcionais.

O recíproco tamén é certo, polo que se poden deducir os criterios de semellanza de triángulos.

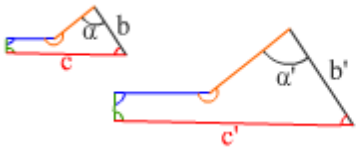
So cando as rectas azuis son paralelas,
Se obteñen segmentos proporcionais

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$$

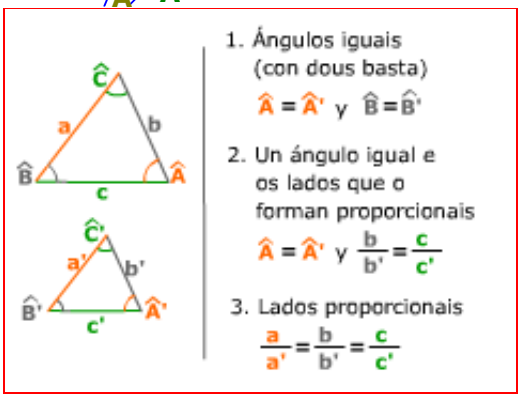


Triángulos semellantes

Dúas figuras son semellantes se por homotecias e movementos coinciden. En polígonos significa que os **lados** han de ser **proporcionais** e os **ángulos iguais**.



Os ángulos iguais
$\alpha = \alpha'$ ...
Os lados proporcionais
$b'/b = c'/c$ ...



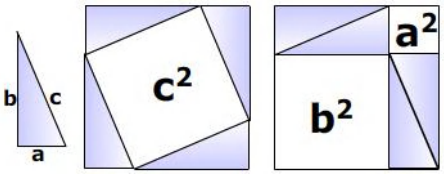
Polo teorema de Tales para que dous **triángulos** sexan **semellantes** abonda con que se cumpra algún dos tres **criterios** da dereita.

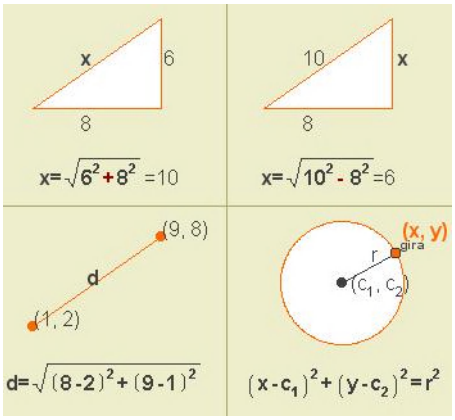
Teorema de **Pitágoras**

O teorema de Pitágoras di que nun triángulo rectángulo, de catetos a e b, e de hipotenusa c, cúmprese que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

A imaxe é unha demostración gráfica do teorema.

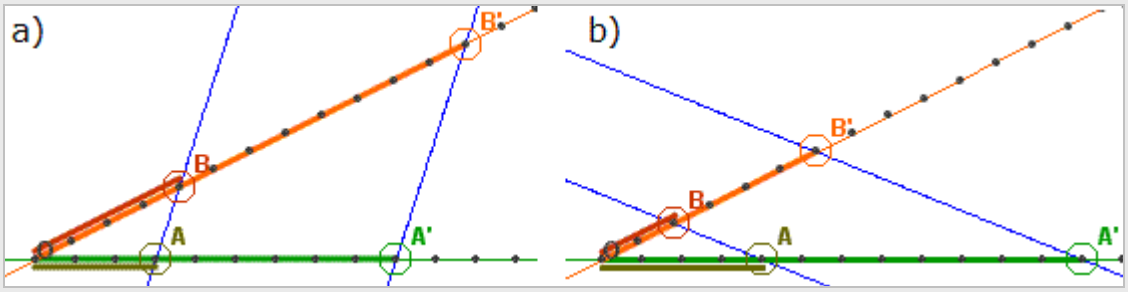




Na dereita vemos algunhas aplicacións deste teorema, utilizado para calcular hipotenusas, catetos, distancias entre puntos e ecuacións de circunferencias.

EXERCICIOS resoltos

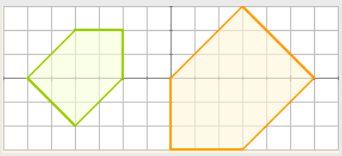
12. Acha nos casos a) e b) as proporcións $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$ e $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$



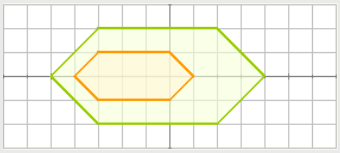
Solucións: a) $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ e $\frac{9}{3} = \frac{12}{4}$ b) $\frac{4}{2} = \frac{12}{6}$ e $\frac{12}{4} = \frac{6}{2}$

13. Contesta razoadamente:

a) Son semellantes?



Si, posto que os lados están en proporción 2/3 e os ángulos son iguais.



Non, os ángulos son iguais pero os lados non son proporcionais.

Non, os ángulos non son iguais.

b) Un triángulo cun ángulo de 30º e outro de 40º, é forzosamente semellante a un triángulo cun ángulo de 30º e outro de 110º?

Si, pois como os ángulos dun triángulo suman 180º, conclúese que os ángulos dos dous triángulos son iguais e polo criterio 1, son semellantes.

c) Un triángulo de lados 3, 6 e 7 cm, é semellante a outro no que os lados miden 9, 36 e 49 cm?

Non pois os lados non son proporcionais.

d) Un cuadrilátero de lados 3, 4, 5 e 6 cm, é necesariamente semellante a outro de lados 6, 8, 10 e 12 cm?

Non pois aínda que os lados son proporcionais, en polígonos de máis de tres lados isto non abonda para que aconteza a semellanza, han de ser ademais os ángulos iguais.

e) Dous triángulos que teñen un ángulo de 20º e os lados que os forman miden 6 e 15 cm no primeiro e 4 e 10 cm no outro. Son semellantes?

Si, polo segundo criterio, xa que a proporción entre os lados que forman o ángulo igual é en ambos os dous casos 2/5.

EXERCICIOS resoltos (continuación)

f) Dous polígonos regulares co mesmo número de lados, son semellantes?

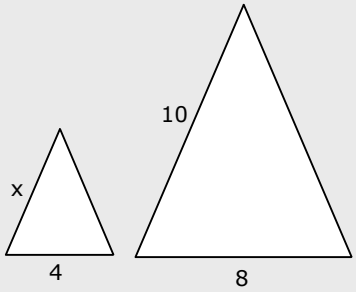
Si, os ángulos son iguais, (nº de lados-2)180º/nº de lados, e os lados, proporcionais.

g) Os lados de dous triángulos miden 3, 6 e 7 cm, nun, e $\sqrt{18}$, $\frac{12}{\sqrt{2}}$ e $7\sqrt{2}$ noutro. Son semellantes?

Si, pois os lados son proporcionais: $\sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$; $\frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}$

e en triángulos abonda con esta condición (criterio 3)

14. Os triángulos da figura son semellantes, acha a medida do lado x

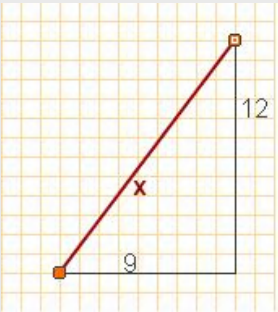


$$\frac{x}{4} = \frac{10}{8} \Rightarrow x = 5$$

15. Acha a altura da árbore

$$\frac{x}{2{,}16} = \frac{1{,}4}{0{,}84} \quad \Rightarrow \quad x = 2{,}16 \cdot \frac{1{,}4}{0{,}84} = 3{,}6$$

5. Calcula a hipotenusa no triángulo da figura (a solución vese dando a volta á folla)



Polo T. de Pitágoras

$x^2 = 9^2 + 12^2$

Calculamos os cadrados

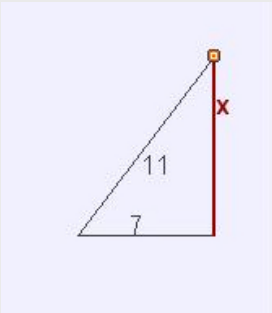
$x^2 = 81 + 144$

E sumamos

$x^2 = 225 \rightarrow x = \sqrt{225}$

$x = 15$

6. Calcula o cateto no triángulo da figura (a solución vese dando a volta á folla)



Polo T. de Pitágoras

$x^2 = 11^2 - 7^2$

Calculamos os cadrados

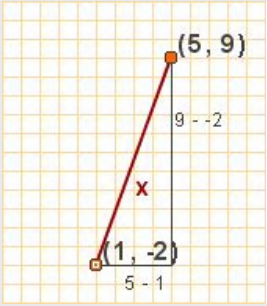
$x^2 = 121 - 49$

E sumamos

$x^2 = 72 \rightarrow x = \sqrt{72}$

EXERCICIOS resoltos (continuación)

7. Calcula a distancia entre os dous puntos da figura (a solución vese dando a volta á folla)

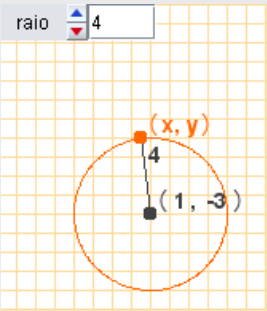


Para calcular a distancia entre dous puntos aplícase o T. de Pitágoras

$x^2 = 4^2 + 11^2$

$x^2 = 137 \rightarrow x = \sqrt{137}$

8. Calcula a ecuación da circunferencia da figura (a solución vese dando a volta á folla).



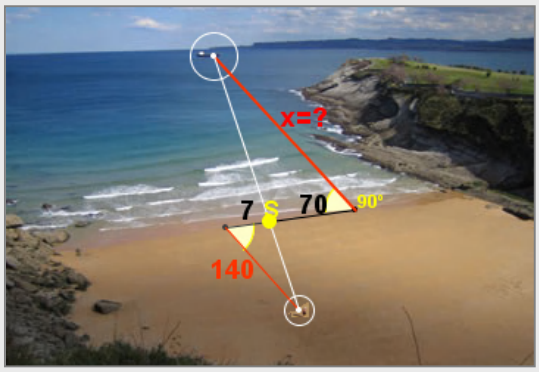
A distancia de calquera punto da circunferencia ao centro é igual ao raio:

$(x-1)^2 + (y-(-3))^2 = 4^2$

$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4^2$

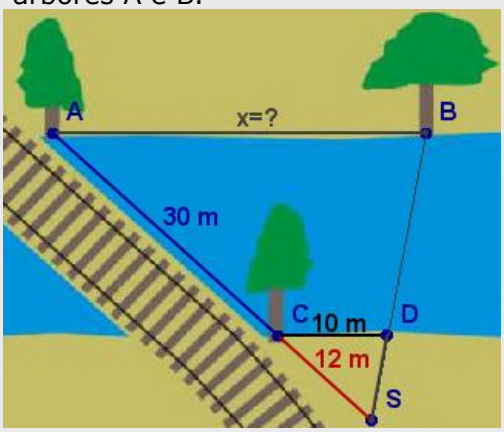
Esta é a ecuación da circunferencia.

9. Para calcular a distancia dende a praia a un barco tomáronse as medidas da figura. Calcula a distancia ao barco.



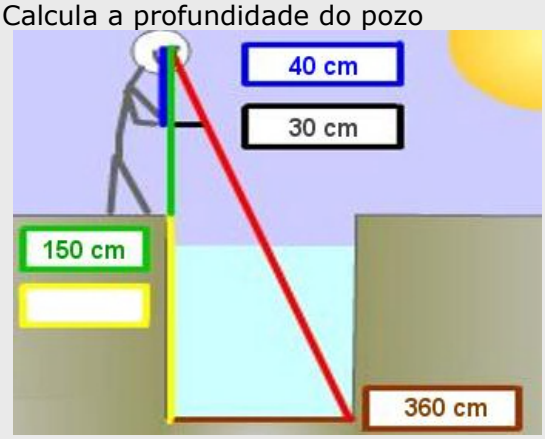
$$\frac{x}{140} = \frac{70}{7} \Rightarrow x = \frac{70 \cdot 140}{7} = 1400 \text{ m}$$

10. Calcula a distancia entre as árbores A e B.



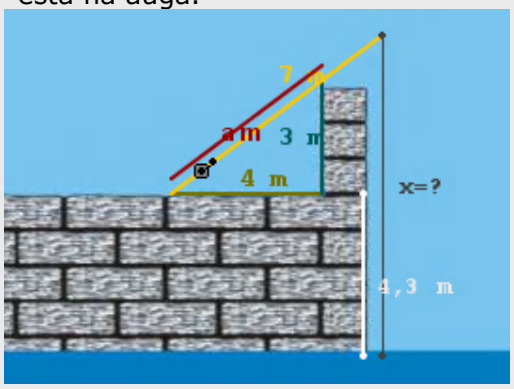
$$\frac{x}{30\,m + 12\,m} = \frac{10\,m}{12\,m} \Rightarrow x = \frac{420}{12}\,m = 35\,m$$

11. Calcula a profundidade do pozo



$$\frac{x + 150}{360} = \frac{40}{30} \Rightarrow x + 150 = \frac{360 \cdot 40}{30} \Rightarrow x = 330$$

12. Acha a lonxitude x da sedela que non está na auga.



Polo T. De Pitágoras a=5 e por T. de Tales

$$\frac{x - 4{,}3\,m}{7\,m} = \frac{3\,m}{5\,m} \Rightarrow x - 4{,}3\,m = \frac{21}{5}\,m \Rightarrow x = 8{,}5\,m$$

2.Razóns trigonométricas

Definición

A razón ou cociente entre dous lados dun triángulo rectángulo determina a súa forma.

Estas razóns, denominadas razóns trigonométricas, resúmense na táboa seguinte,

Razóns trigonométricas	seno	coseno	tanxente
Abreviaturas	**sen**	**cos**	**tan**

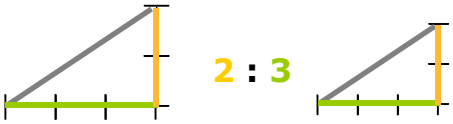
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

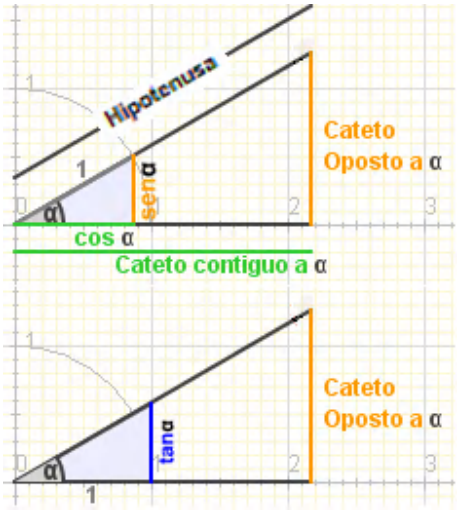
$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

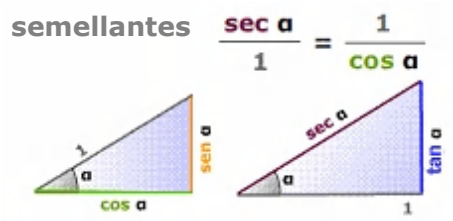
$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto contiguo}}$$

Son importantes tamén as razóns inversas así a razón da hipotenusa entre o cateto contiguo é a secante, memoriza os triángulos da dereita que serán moi útiles para resolver triángulos máis adiante.

Triángulos semellantes, mesma razón = mesma forma



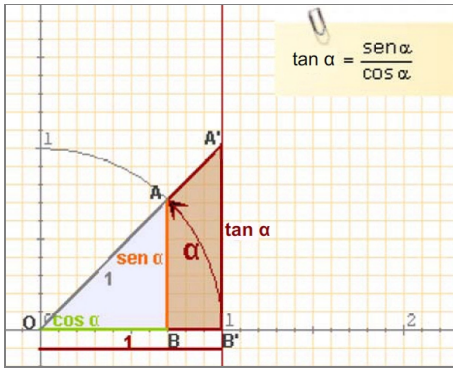




Relacións fundamentais

Se se aplican a semellanza e o teorema de Pitágoras aos triángulos rectángulos "básicos", é dicir, con hipotenusa=1 ou con cateto contiguo=1, obtéñense as relacións fundamentais da trigonometría:

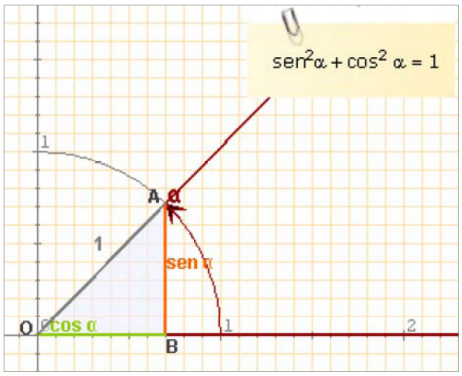
Os triángulos OBA e OB'A' son semellantes:



$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{1} \quad \text{entón} \quad \boxed{\tan\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triángulo OBA da figura obtemos:

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

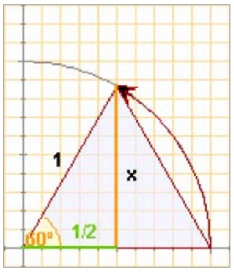


Razóns de 30º, 45º e 60º

Os ángulos de 30º, 45º e 60º aparecen con bastante frecuencia, fíxate como se calculan as súas razóns a partir da definición buscando os triángulos axeitados.

Nun triángulo equilátero os ángulos miden **60º**
Co Teorema de Pitágoras calcúlase a altura

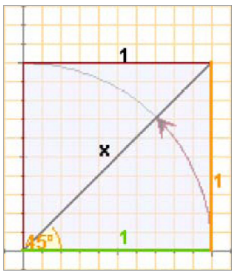
$$x = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



	30º	45º	60º
sen	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$

Nun cadrado de lado **1**
co Teorema de Pitágoras calcúlase a diagonal

$$\text{diag} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



Memorizar esta táboa é doado se observas a orde que gardan. Unha vez aprendidos os senos coas raíces consecutivas, os cosenos saen en orde inversa.

Coa calculadora

- Dado un ángulo α obter as súas razóns trigonométricas.

  Por exemplo o sen 28º 30'

  Pon a calculadora en modo DEG

  Teclea 28 º ' '' 30 º ' '' sen

  Obtemos: 0,477158760

  Nalgunhas calculadoras hai que pulsar a tecla sen antes de introducir o ángulo, comproba como funciona a túa.

  Se queremos obter o cosα ou a tanα procederemos da mesma forma pero pulsando as teclas cos e tan respectivamente.

- Dada unha razón obter o ángulo α correspondente.

  Co mesmo valor que tes na pantalla: 0,477158760

  Comproba que a calculadora segue en modo DEG

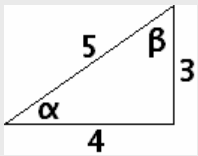
  Teclea SHIFT sen

  Obtemos: 28,5 en graos, se queremos graos, minutos e segundos, pulsamos SHIFT º ' '' obtendo 28º 30'

EXERCICIOS resoltos

13. No triángulo da figura calcula:

a) sen α d) sen β
b) cos α e) cos β
c) tan α f) tan β



a) $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$ d) $\text{sen}\,\beta = \frac{4}{5} = 0{,}8$

b) $\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$ e) $\cos\beta = \frac{3}{5} = 0{,}6$

c) $\tan\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$ f) $\tan\beta = \frac{4}{3} = 1{,}\hat{3}$

14. Obtén coa calculadora:

a) sen 30º = 0,5
b) cos 60º = 0,5
c) tan 45º = 1

15. Obtén coa calculadora os ángulos α e β do exercicio 5.

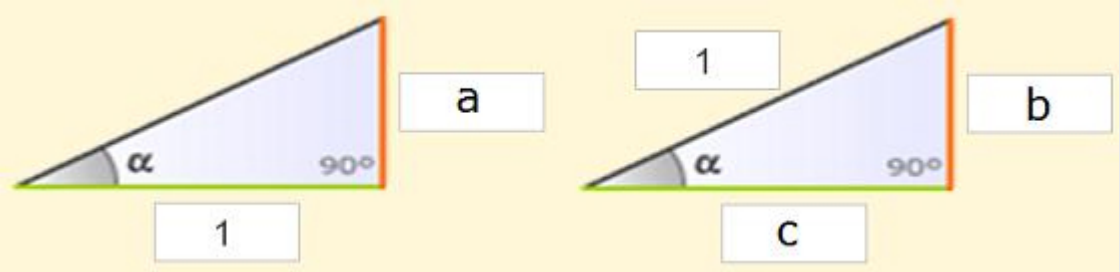
α: Tecleamos 0 . 6 SHIFT sen→ 36,87º

β: Tecleamos 0 . 8 SHIFT sen→ 53,13º

Observa que certamente suman 90º.

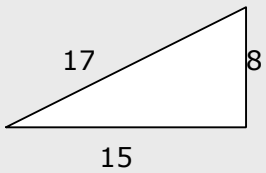
EXERCICIOS resoltos

16. Decide que razóns do ángulo α corresponden aos lados a, b e c

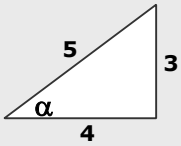


Solución: a = tan α b = sen α c = cos α

17. No seguinte triángulo calcula o sen α, cos α e tan α

	sen α =8/17 cos α =15/17 tan α =8/15

18. Comproba no ángulo α do triángulo da figura que se cumpren as relacións fundamentais



$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1 \quad \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} = \tan\alpha$$

19. Calcula o coseno e a tanxente dun ángulo agudo α tal que sen α=0,3

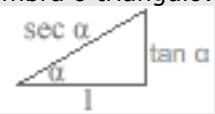
$$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0{,}3^2 = 1 - 0{,}09 = 0{,}81 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$$

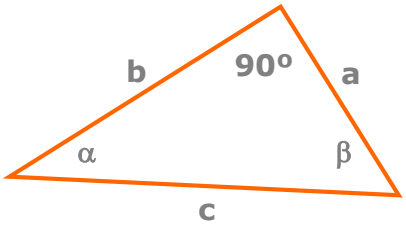
$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{1}{3}$$

20. Comproba que se cumpre a relación: $1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$

$$1 + \tan^2\alpha = 1 + \left(\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

Lembra o triángulo:





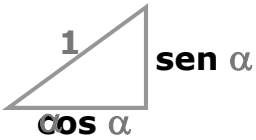
3. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo consiste en calcular os datos descoñecidos, lados ou ángulos, a partir doutros coñecidos.

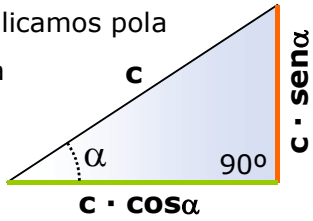
Vexamos os casos que se poden presentar.

a) Coñecidos un ángulo e a hipotenusa

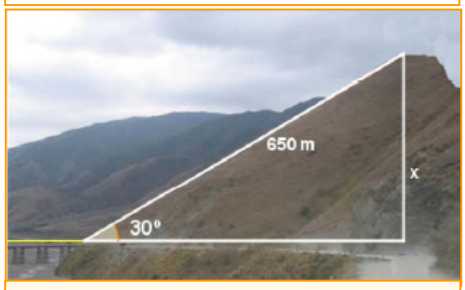
Para achar os catetos dun triángulo rectángulo do que se coñecen as medidas da hipotenusa e **dun ángulo agudo, pensaremos no triángulo:**



que multiplicamos pola hipotenusa



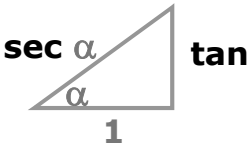
Calcular a altura do monte.



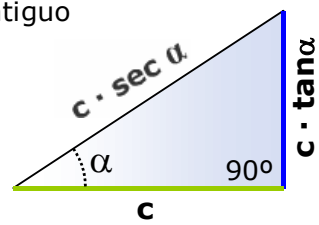
x = 650· sen 30º =650 · 0,5

b) Coñecidos un ángulo e un cateto

Para achar os lados dun triángulo rectángulo do que se coñecen as medidas dun cateto e dun ángulo non recto, pensaremos no triángulo:



que multiplicamos polo cateto contiguo



Calcular a altura da torre.

x = 20·tg 45º = 20·1=20m

c) Coñecidos dous lados

Para achar o outro lado do triángulo aplicarase o teorema de Pitágoras.
O ángulo determinarase como:

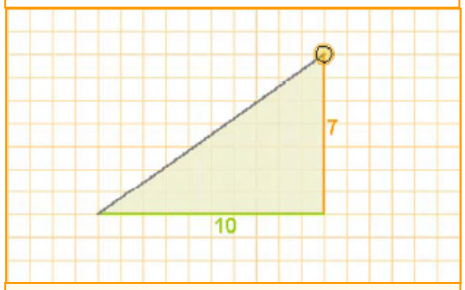
O arco cuxa tanxente é $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto contiguo}}$

Ou ben como o arco cuxo seno é $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$,

dependendo dos datos iniciais.

Para calcular o outro ángulo abonda restar de 90º.

Resolver o triángulo.

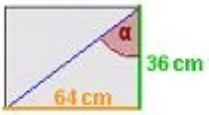


hipotenusa $= \sqrt{7^2 + 10^2} = \sqrt{149}$
Coa calculadora: atan(0,7)=35º
E o outro ángulo: 90º-35º=55º

EXERCICIOS resoltos

21. Calcula as polgadas e o formato dunha pantalla a base da cal mide 64 cm e a súa altura 36 cm

Solución



Polo teorema de Pitágoras, a diagonal mide, en cm:

$$\sqrt{64^2+36^2}=\sqrt{3600}=60$$

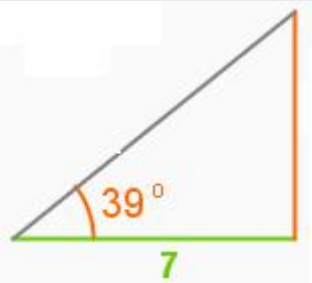
O que en **polgadas** é: $60 \cdot 0{,}39 = \mathbf{23{,}4}$

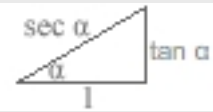
A tanxente de **α**, $\frac{64}{36}$ simplificada dá $\frac{16}{9}$

16:9 é o formato da pantalla.

22. No seguinte triángulo rectángulo calcula a medida dos seus lados e dos seus ángulos.

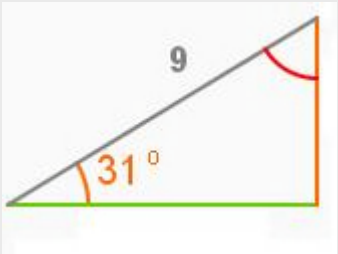
Solución: O outro ángulo é de 90º - 39º = 51º.
Utilizamos o triángulo básico da tanxente para calcular os outros lados

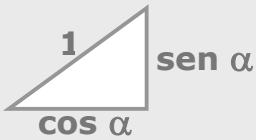


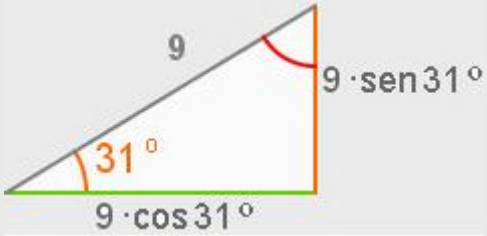


23. Resolve o triángulo da figura.

Solución: O outro ángulo é de 90º - 31º = 59º.
Utilizamos o triángulo básico do seno para calcular os outros lados

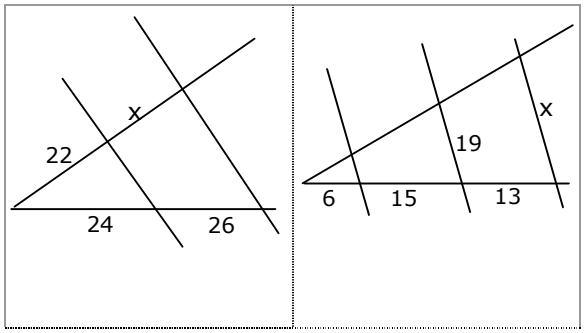






Para practicar

1. Acha x en cada caso



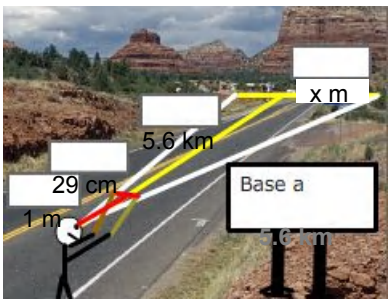
2. As medidas de tres lados homólogos de dous cuadriláteros semellantes son:

4 cm	x cm	7 cm
20 cm	10 cm	y cm

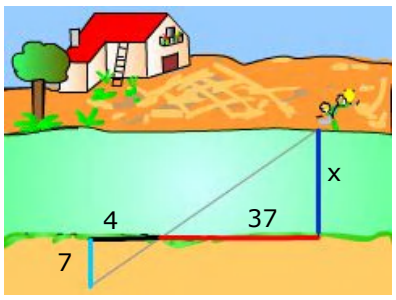
Acha x e y

3. A base dun monte obsérvase a unha distancia de 5,6 km. Móvese unha regreta de 29 cm ata cubrir con ela visualmente a base e nese momento a distancia da regreta ao ollo do observador é de 1 m.

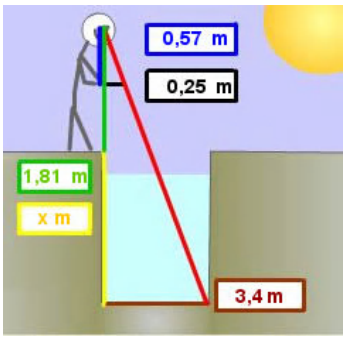
Calcula a anchura da base do monte.



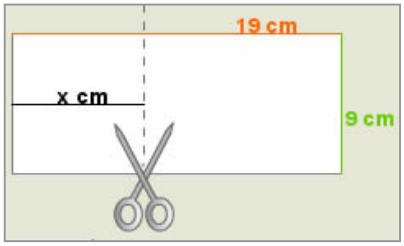
4. Calcula a anchura do río.



5. Calcula a profundidade do pozo.



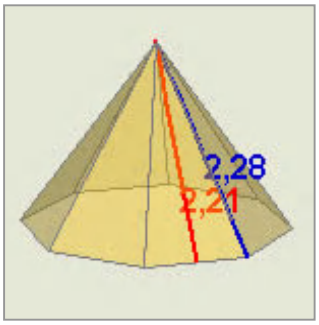
6. Por onde se ha de cortar a folla para que o anaco da esquerda sexa semellante á folla enteira?.



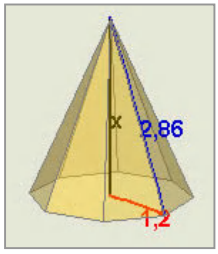
7. Debuxa no teu caderno un triángulo cun ángulo de 69º e un dos lados que o forman de 9 cm. Son semellantes todos os triángulos que cumpren estas condicións?

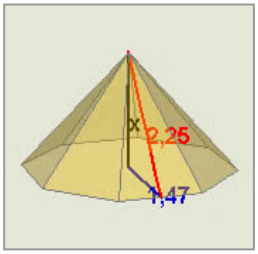
8. Debuxa no teu caderno un triángulo cun ángulo de 56º e o cociente dos lados que o forman igual a 3. Son semellantes todos os triángulos que cumpren estas condicións?

9. Calcula o lado da base da pirámide.



10. Calcula a altura da pirámide en cada caso.





11. Acha a distancia entre os puntos (-3, 4) e (5, -2).

12. Ecuación da circunferencia de centro (0,-1) e radio 3.

13. Acha coa calculadora as seguintes razóns trigonométricas:

a) sen 30º b) cos 67º c) tan 45º

14. Un ángulo dun triángulo rectángulo mide 47º e o cateto oposto 8 cm, acha a hipotenusa.

15. A hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 26 cm e un ángulo 66º. Calcula os catetos.

16. Un ángulo dun triángulo rectángulo mide 44º e o cateto contiguo 16 cm, calcula o outro cateto.

17. O cos dun ángulo agudo é 3/4, calcula o seno do ángulo.

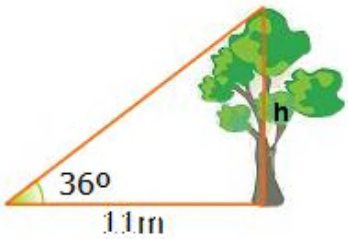
18. A tanxente dun ángulo agudo é 12/5 calcula o seno.

19. O sen α =3/5 ε α é un ángulo agudo, calcula a tan α.

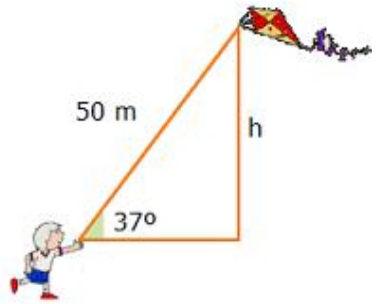
20. A apotema dun polígono regular de 9 lados mide 15 cm, calcula o lado.

21. O lado dun exágono regular mide 30 cm, calcula a apotema.

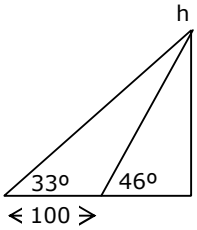
22. A sombra dunha árbore cando os raios do sol forman coa horizontal un ángulo de 36º, mide 11 m. Cal é a altura da árbore?.



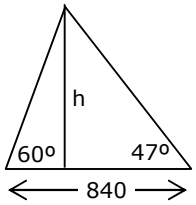
23. O fío dun papaventos mide 50 m de longo e forma coa horizontal un ángulo de 37º, ¿a qué altura voa o papaventos?.



24. Para medir a altura dun edificio mídense os ángulos de elevación dende dous puntos distantes 100 m. Cal é a altura se os ángulos son 33º e 46º?.

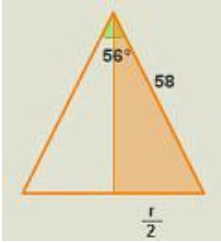


25. Dúas persoas distantes entre si 840 m, ven simultaneamente un avión con ángulos de elevación respectivos de 60º e 47º, ¿a qué altura voa o avión?.

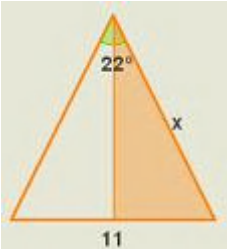


26. Cun compás os brazos do cal miden 58 cm, trazamos unha circunferencia. Se o ángulo que forman os seus brazos é 56º.

Cál é o raio da circunferencia?

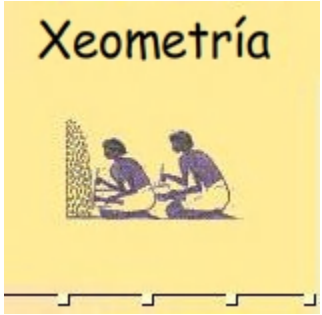


27. Cun compás trazamos unha circunferencia de 11 cm de radio. Se o ángulo que forman os seus brazos é de 22º. Cál é a lonxitude dos brazos do compás?



Para saber máis

Xeometría grega



A tradición atribúe a Thales (600 anos antes da nosa era) a introdución en Grecia da xeometría exipcia.

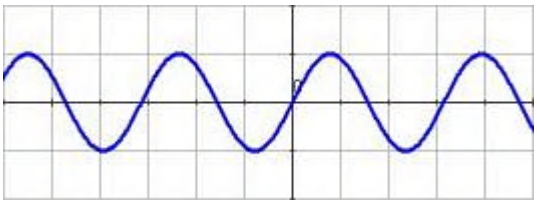
Thales foi un precursor sobre todo preocupado de problemas prácticos (cálculo de alturas de monumentos con axuda dun bastón e da proporcionalidade das sombras).

A xeometría grega que foi un éxito asombroso da ciencia humana dando probas dun enxeño excepcional, estivo marcada por dúas Escolas: a de Pitágoras e a de Euclides.

Ver máis en:
http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/pages/hist_mat/textes/h_geom.htm

Os sons

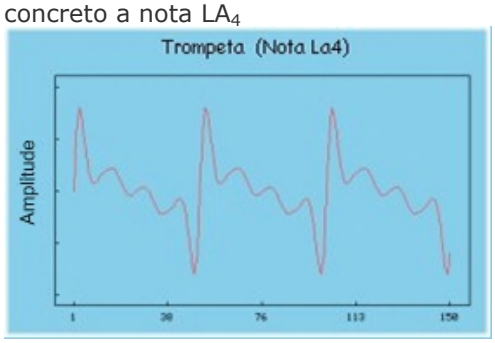
Se utilizaches algún programa de son probablemente terás visto que se representa por ondas. As ondas son funcións trigonométricas, que representan puntos da forma (x, senx):



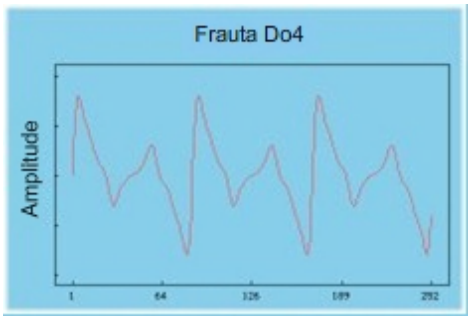
Na páxina interactiva "para saber máis" á que corresponde este texto podes construír, cun aparello de facer gráficas, diversas ondas. Nesa mesma páxina podes atopar un programa co que producir distintos sons cunha mesma nota e ver a súa gráfica.

A forma de onda é a característica que nos permitirá distinguir unha nota da mesma frecuencia e intensidade producida por instrumentos diferentes. A forma de onda ven determinada polos harmónicos.

Forma de onda (ou timbre) da trompeta, en concreto a nota LA_4



Forma de onda (ou timbre) dunha frauta, a nota DO4

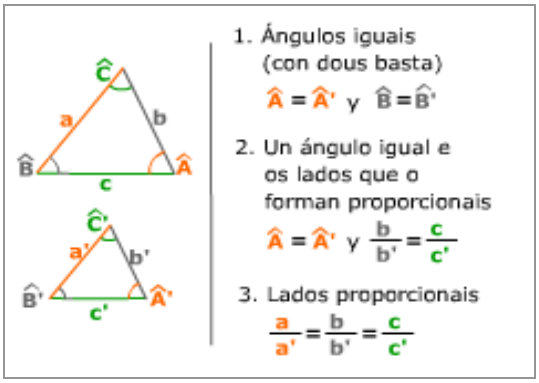


Recoméndase visitar a páxina http://www.xtec.es/centres/a8019411/caixa/ondas.htm

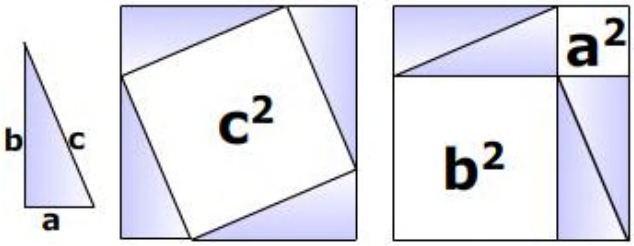
Lembra o máis importante

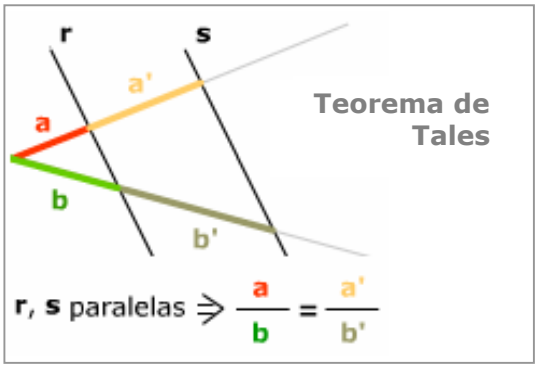
Polígonos semellantes
Se teñen e os lados proporcionais e os ángulos iguais.

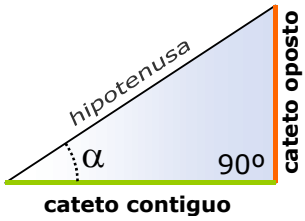
Triángulos semellantes
No caso dos triángulos abonda que se cumpra un dos tres criterios:



Teorema de Pitágoras $a^2+b^2=c^2$







- ✓ O **seno** é o cociente entre o cateto oposto e a hipotenusa.
- ✓ O **coseno** é o cociente entre o cateto contiguo e a hipotenusa.
- ✓ A **tanxente** é o cociente entre o cateto oposto e o cateto contiguo.

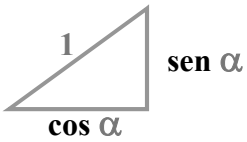
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

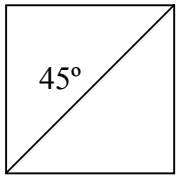
$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto contiguo}}$$

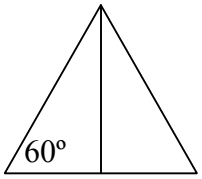
$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

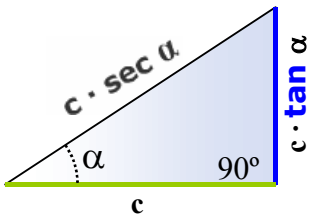
Relacións fundamentais

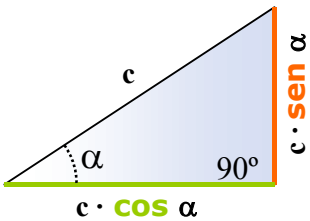


	30º	45º	60º
seno	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
coseno	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$



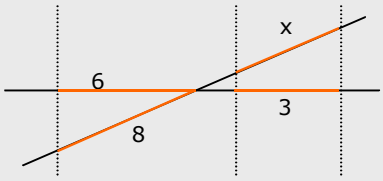




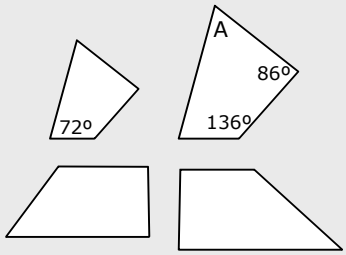


Resolver un triángulo rectángulo consiste en achar as medidas dos seus seis elementos: tres lados e dous ángulos (o terceiro é 90º), coñecidos un lado e un ángulo ou dous lados.

Autoavaliación

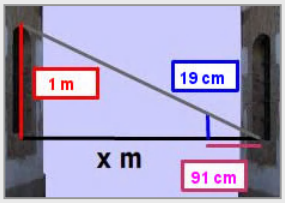


1. Aplica a semellanza para calcular o valor de x.

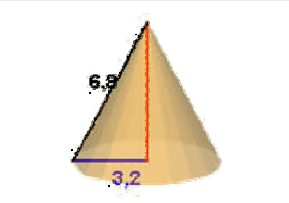


2. Sabendo que os ángulos dun cuadrilátero suman 360º, calcula o ángulo A.

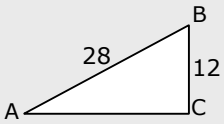
3. Os polígonos da figura, ¿son semellantes?.



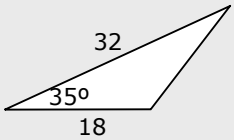
4. Como a ventá da casa de en fronte é igual que a miña podo saber a súa altura, e coa visual dunha vara calcular a anchura da rúa. Calcúlaa.



5. A xeratriz dun cono recto mide 6,8 cm e o radio da base 3,2 cm. Acha a altura dun cono semellante a este realizado a escala 1:2.

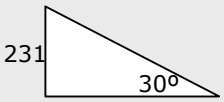


6. Calcula o valor de tan A no triángulo ABC da figura.



7. Calcula a área do triángulo da figura.

8. Se sen α = 0.8, e α é un ángulo agudo, calcula a tan α.



9. A altura de Torre España é de 231 m, ¿canto mide a súa sombra cando a inclinación dos raios do sol é de 30º?

10. Calcula a área dun triángulo equilátero de lado 4 cm.

Solucións dos exercicios para practicar

1. a) 143/6 b) 646/21
2. x=2 y=35
3. 1624 m
4. 64,75
5. 5,94 m
6. 4,26 cm
7. Non teñen porque ser semellantes
8. Son semellantes
9. 1,12
10. 1,70
11. 97,98 m
12. $x^2 + (y-1)2 = 9$
13. a) 0,5 b) 0,39 c) 1
14. 10,94cm
15. 23,75 cm e 10,58 cm
16. 15,45 cm
17. 0,66
18. 12/13
19. 3/4
20. 1º,92 cm
21. 25,98 cm
22. 7,99 m
23. 30,09 m
24. 174,16 m
25. 556,34 m
26. 54,46 cm
27. 22,82 cm

Prob. 7 Prob.8

Solucións AUTOAVALIACIÓN

1. 4
2. 66º
3. Non son semellantes
4. 91/19 m =4,78 m
5. 3 cm
6. 0,47
7. 165,19 u^2
8. 4/3
9. 400,10 m
10. 6,93 cm^2

Non esquezas enviar as actividades ao titor ▸