

Objetivos

En esta quincena aprenderás:

- A trabajar con expresiones literales para la obtención de valores concretos en fórmulas y ecuaciones en diferentes contextos.
- La regla de Ruffini.
- El teorema del resto.
- A reconocer los polinomios con coeficientes reales irreducibles.
- A factorizar polinomios con raíces enteras.

Antes de empezar

1. Expresiones algebraicas pág. 64
De expresiones a ecuaciones
Valor numérico
Expresión en coeficientes
2. División de polinomios pág. 67
División
División con coeficientes
Regla de Ruffini
Teorema del resto
3. Descomposición factorial pág. 70
Factor común x^n
Polinomios de 2º grado
Regla de Ruffini reiterada
Identidades notables

Ejercicios para practicar

Para saber más

Resumen

Autoevaluación

Antes de empezar

Dividir $x^2 + 4x + 3$ entre $x + 1$

resto=0

$x + 3 =$ cociente

Base= $x + 1 \rightarrow$ divisor

Para dividir x^2+4x+3 entre $x+1$ tomamos piezas: una de área x^2 cuatro de área x tres de área 1. Y formamos con ellas el rectángulo mayor posible que tenga de base $x+1$.

En la figura vemos que $x^2+4x+3=(x+1) \cdot (x+3)$.

Te proponemos un repaso de algunas de las cosas aprendidas en los cursos anteriores:

Expresiones algebraicas

$-3 \cdot (x+y)$

El doble	
El triple	
La mitad	del cuadrado
Menos el doble	del cubo
Menos el triple	de x e y
Menos la mitad	de x menos y
La raíz	de x por y
27 por ciento	del inverso
	de x entre y

Elementos de un polinomio

$P(x) = 2x^5 + x^4 - 1$

Sus coeficientes

gr5	gr4	gr3	gr2	gr1	gr0
2	1	0	0	0	-1

Su grado ¿Cuántos monomios?

5 3

Valor numérico en 1

1

Producto de polinomios

$P(x) = -5x^2 - 4x - 3$
 $Q(x) = -5x + 2$

Se multiplica coeficiente a coeficiente

P(x) →	-5	-4	-3	
Q(x) →		-5	2	
	-10	-8	-6	
	25	20	15	
P(x) · Q(x) →	25	10	7	-6

$25x^3 + 10x^2 + 7x - 6$

Ecuaciones de segundo grado

Ecuación de segundo grado

$2x^2 - 4x - 16 = 0$

Paso 1: Identificar a, b y c

$a = 2 ; b = -4 ; c = -16$

Paso 2: Aplicar la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 128}}{4} = \frac{4 \pm 12}{4} \quad \begin{matrix} x = 4 \\ x = -2 \end{matrix}$$

Polinomios

1. Expresiones algebraicas

Transformar enunciados en expresiones

Son muchas las situaciones en las que se utilizan expresiones algebraicas, en la derecha se presentan algunas.

Cuando la expresión algebraica es de estos tipos:

$$3xy^2; 2x^{10}; \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot y^5$$

solo con productos de números y potencias de variables de exponente natural, se denomina monomio. La suma de varios monomios es un polinomio.

<p>Escoge la expresión algebraica del doble de un número, más 10</p> <p>(A) $10x+2$ (C) $2(x+10)$</p> <p>(B) $2x+10$ (D) $\frac{x}{2}+10$</p> <p style="text-align: right;">Solución B</p>	<p>Escoge la expresión de la 5ª parte de la suma de un número más 11</p> <p>(A) $\frac{11}{5}+x$ (C) $\frac{x}{5}+11$</p> <p>(B) $\frac{22+11}{5}$ (D) $\frac{x+11}{5}$</p> <p style="text-align: right;">Solución D</p>
--	--

Valor numérico

Si en una expresión algebraica sustituimos las letras (variables) por números, lo que tendremos será una expresión numérica. El resultado de esta expresión es lo que llamamos valor numérico de la expresión algebraica para esos valores de las variables.

Observa los ejemplos de la escena de la derecha.

Es importante que tengas en cuenta la **prioridad de las operaciones**

1. Potencias
2. Productos y cocientes
3. Sumas y restas

Polinomios. Expresión en coeficientes

Los polinomios son expresiones algebraicas en las que las partes literales no llevan por exponentes números negativos o fracciones, los coeficientes pueden llevar raíces y se puede dividir por números, pero en los polinomios no aparece un literal dividiendo ni dentro de una raíz.

Es muy conveniente que recuerdes la manera de expresar un polinomio por sus coeficientes, tal y como se explica en la escena de la derecha.

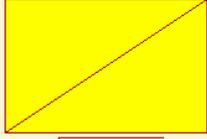
No olvides poner un cero en el coeficiente cuando en el polinomio falta la potencia de un grado, así en

$$2x^3+x+5 \text{ escribimos } 2 \ 0 \ 1 \ 5.$$

A golpe de vista y sin pasos intermedios debes saber ver la expresión en coeficientes de un polinomio.

¿Qué expresión nos define la diagonal de un rectángulo de base x y altura y ?

Aplica el teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = \text{diagonal}^2$



$\sqrt{x^2 + y^2}$

Esta expresión no es un polinomio.

¿Qué monomio nos da el área de un rectángulo de base x y altura y ?



$x \cdot y$ es el área

Monomio de dos variables y de grado 2.

$$\begin{aligned} 2 - 6 \cdot x^3 \\ \text{valor en } 3 \\ 2 - 6 \cdot 3^3 \\ 2 - 6 \cdot 27 \\ 2 - 162 \\ -160 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 + 2 \cdot x^2 \\ \text{valor en } \frac{-5}{7} \\ 4 + 2 \cdot \left(\frac{-5}{7}\right)^2 \\ 4 + 2 \cdot \frac{25}{49} \\ 4 + \frac{50}{49} \\ \frac{246}{49} \end{aligned}$$

Con la calculadora

Puedes utilizar la calculadora para hallar el valor numérico de un polinomio. Recuerda que para realizar la potencia 7^4 se utiliza la tecla x^y ,

$$7 \ x^y \ 4 \ = \rightarrow 2041$$

$$4x^3 + 4x^2 - 3x + 2$$

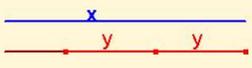
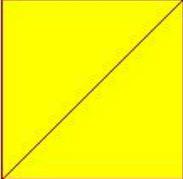
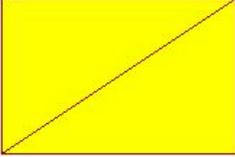
4 4 -3 2

$$-2x^4 - x^3 + 4x$$

-2 -1 0 4 0

EJERCICIOS resueltos

1. Halla las expresiones algebraicas asociadas a cada imagen

<p>Área del rectángulo</p>  <p>x</p> <p>y</p>	 <p>Volumen, arista=x</p>	<p>Longitud del segmento marrón</p> 	<p>Qué polinomio expresa la media aritmética de dos números x, y</p>
<p>El triple de un número menos cinco</p>	<p>La suma de los cuadrados de dos números</p>	 <p>La diagonal de un cuadrado de lado x</p>	 <p>La diagonal de un rectángulo de base x y altura y</p>

Soluciones

<p>$x \cdot y$ Polinomio de grado 2 y dos variables</p>	<p>x^3 Monomio de grado 3</p>	<p>$x-2y$ Polinomio de grado 1 Dos variables</p>	<p>$0,5x+0,5y$ Polinomio de grado 1 Dos variables</p>
<p>$3x-5$ Polinomio de grado 1 Una variable</p>	<p>x^2+y^2</p>	<p>$\sqrt{2} \cdot x$</p>	<p>$\sqrt{x^2 + y^2}$</p>

2. Escoge la expresión algebraica en cada caso

<p>1 El triple de un número más seis</p> <p>(A) $6x+3$</p> <p>(B) $3x+6$</p> <p>(C) $3(x+6)$</p> <p>(D) $\frac{x}{3}+6$</p>	<p>2 La quinta parte de un n^o más 10.</p> <p>(A) $\frac{x}{5}+10$</p> <p>(B) $\frac{x+10}{5}$</p> <p>(C) $10x+5$</p> <p>(D) $5x+10$</p>	<p>3 Un cuarto de la suma un n^o más 7.</p> <p>(A) $\frac{x+7}{4}$</p> <p>(B) $\frac{x}{4}+7$</p> <p>(C) $\frac{14+7}{4}$</p> <p>(D) $\frac{7}{4}+x$</p>	<p>4 La semisuma de dos números.</p> <p>(A) $\frac{x \cdot y}{2}$</p> <p>(B) $\frac{x+y}{2}$</p> <p>(C) $\frac{x}{2}+y$</p> <p>(D) $\frac{x-y}{2}$</p>	<p>5 La mitad del producto de $2 n^o$s.</p> <p>(A) $\frac{x}{2} \cdot y$</p> <p>(B) $\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2}$</p> <p>(C) $\frac{x-y}{2}$</p> <p>(D) $\frac{x \cdot 7}{2}$</p>
<p>6 La raíz cuadrada de la suma de 2 cuadrados.</p> <p>(A) $x+y$</p> <p>(B) x^2+y^2</p> <p>(C) $\sqrt{x^2+y^2}$</p> <p>(D) $\sqrt{x^2+y^2}$</p>	<p>7 El 40% de un número.</p> <p>(A) $0.4 x$</p> <p>(B) $\frac{40}{100} x$</p> <p>(C) $\frac{40}{10} x$</p> <p>(D) $\frac{100 x}{40}$</p>	<p>8 El cuadrado de la suma de 2 números.</p> <p>(A) $(z+y)^2$</p> <p>(B) x^2+y^2</p> <p>(C) $x+y^2$</p> <p>(D) $(12+y)^2$</p>	<p>9 El cuadrado de la semisuma de 2 números.</p> <p>(A) $\frac{x^2+y^2}{4}$</p> <p>(B) $\frac{x+y^2}{2}$</p> <p>(C) $\frac{(x+y)^2}{4}$</p> <p>(D) $\frac{(x+y)^2}{2}$</p>	<p>10 La media aritmética de tres números</p> <p>(A) $0.5x+0.5y+0.5z$</p> <p>(B) $(\frac{x+y}{2} + z)/2$</p> <p>(C) $\frac{x+y+z}{3}$</p> <p>(D) $\frac{x+y+z}{2}$</p>

Soluciones: 1 B; 2 A; 3 A; 4 B; 5 A; 6 D; 7 A; 8 A; 9 C; 10 C.

EJERCICIOS resueltos

3. Halla los valores numéricos indicados en cada caso.

$2 - 7 \cdot x^5$ en $x = -2$	$3 + 5 \cdot x^3$ en $x = \frac{2}{3}$	$3\sqrt{x} - 3 \cdot x^3$ en $x = 9$	$\frac{x^5}{y^3} + 4$ en $x = -2$ $y = 3$	$\frac{x^5}{y^4} + 1$ en $x = 4$ $y = 4$
$2 - 7 \cdot (-2)^5$	$3 + 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$	$3\sqrt{9} - 3 \cdot 9^3$	$\frac{(-2)^5}{3^3} + 4$	$\frac{4^5}{4^4} + 1$
$2 - 7 \cdot -32$	$3 + 5 \cdot \frac{8}{27}$	$3 \cdot 3 - 3 \cdot 729$	$\frac{-32}{27} + 4$	$4^1 + 1$
$2 + 224$	$3 + \frac{40}{27}$	$9 - 2187$	$\frac{76}{27}$	$4 + 1$
226	$\frac{121}{27}$	-2178		5

4. Valor numérico en -3

$2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 6$	Sustituye x por (-3)
$2 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot (-3) + 6$	Realiza la potencia de (-3)
$2 \cdot 9 + 5 \cdot (-3) + 6$	Efectúa los productos
$18 + (-15) + 6$	Opera
9	Este es el valor del polinomio para $x = -3$. Pulsa el botón > de la esquina superior.

5. Valor numérico en 0.1

$3 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 2$	Sustituye x por 0.1
$3 \cdot 0.1^2 + 7 \cdot 0.1 + 2$	Efectúa las potencias
$3 \cdot 0.01 + 7 \cdot 0.1 + 2$	Realiza los productos
$0.03 + 0.7 + 2$	Escribe el resultado
2.73	

6.

$x^3 + 4x - 2$

¿Cuál es el grado del polinomio?

Escribe los coeficientes en los recuadros.

Solución: grado 3.

Coeficientes: 1 0 4 -2

$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x$

¿Cuál es el grado del polinomio?

Escribe los coeficientes en los recuadros.

Solución: grado 4.

Coeficientes: 1 -2 -1 -2 0

Polinomios

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es útil para dividir polinomios entre $x-a$.

En el ejemplo de la derecha se divide $3x^3-5x^2+1$ entre $x-2$, obteniendo de cociente $3x^2+x+2$ y de resto 5.

La regla explicada para $a=2$, vale también cuando a es un número racional o real, en el siguiente ejemplo se toma $a=-3/2$ y representa la división de $4x^2+5x+2$ entre $x+3/2$

$$\begin{array}{r} 4 \quad 5 \quad 2 \\ -3/2 \quad -6 \quad 3/2 \\ \hline 4 \quad -1 \quad 7/2 \text{ resto} \\ \text{cociente} \\ 4x-1 \end{array}$$

Teorema del resto

Al dividir un polinomio $P(x)$ por $(x-a)$ el resto es siempre de grado cero y se obtiene un cociente $C(x)$ que verifica:

$$P(x) = (x-a) \cdot C(x) + \text{resto}$$

Si sustituimos ahora la x por a ,

$$P(a) = (a-a) \cdot C(a) + \text{resto}$$

En la igualdad anterior $(a-a)=0$, por tanto,

$$\text{valor numérico de } P \text{ en } a = \text{resto}$$

Este resultado se conoce como **teorema del resto**

Así el valor numérico $P(x)$ en a será cero cuando $P(x)$ sea divisible por $(x-a)$, es decir, el resto de $P(x)$ entre $x-a$ es cero, en este caso decimos que a es **raíz** del polinomio $P(x)$.

Recuerda

$$a \text{ es raíz de } P(x) \Leftrightarrow P(x) = (x-a) \cdot C(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$$

El teorema se puede aplicar para calcular algunos valores numéricos.

$P(x) = x^3 + 15x^2 + 12x + 4$
Hallar $P(-14) = (-14)^3 + 15 \cdot (-14)^2 + 12 \cdot (-14) + 4$

	1	15	12	4
-14		-14	-14	28
	1	1	-2	32

También se utiliza nos para resolver problemas como el siguiente, hallar m para que el polinomio

$$P(x) = x^3 + mx - 4$$

sea divisible por $x-2$, que se resuelve sustituyendo la x por 2, igualando a 0 y despejando m , así $m=-2$.

Observa la división y como se realiza la Regla de Ruffini paso a paso

$$\begin{array}{r} 3 \quad -5 \quad 0 \quad 1 \quad | \quad 1 \quad -2 \\ -3 \quad 6 \quad \quad \quad | \quad 3 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 0 \quad \quad \quad | \quad \quad \quad \text{cociente} \\ -1 \quad 2 \quad \quad \quad | \quad \quad \quad \\ \hline 2 \quad 1 \quad \quad \quad | \quad \quad \quad \\ -2 \quad 4 \quad \quad \quad | \quad \quad \quad \\ \hline 5 \text{ resto} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad -5 \quad 0 \quad 1 \\ 2 \quad \downarrow \\ 3 \quad \quad \quad \end{array}$$

Se multiplican

$$\begin{array}{r} 3 \quad -5 \quad 0 \quad 1 \\ 2 \quad \downarrow \\ 3 \quad 1 \quad \quad \quad \\ \text{Se suman} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad -5 \quad 0 \quad 1 \\ 2 \quad \downarrow \\ 3 \quad 1 \quad 1 \quad \quad \quad \\ \text{Se multiplican} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad -5 \quad 0 \quad 1 \\ 2 \quad \downarrow \\ 3 \quad 1 \quad 2 \quad \quad \quad \\ \text{Se suman} \end{array}$$

Se vuelve a multiplicar y a sumar obteniendo

$$\begin{array}{r} 3 \quad -5 \quad 0 \quad 1 \\ 2 \quad \downarrow \\ 3 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \text{ resto} \\ \text{cociente} \end{array}$$

Con la calculadora

Para calcular el valor numérico de un polinomio con la calculadora, valor de $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$ en $x=2$

Podemos aplicar la regla de Ruffini, para ello teclea la siguiente secuencia:

$$\begin{array}{l} 2 \text{M in} \times 3 \rightarrow 3 \\ -5 = \rightarrow 1 \\ \times \text{MR} + 0 = \rightarrow 2 \\ \times \text{MR} + 1 = 5 \end{array}$$

Obtenemos: 5 que es el resto de dividir $P(x)$ para $x-2$ y el valor numérico en $x=2$.

De paso han ido saliendo los coeficientes del cociente cada vez que se pulsaba =.

EJERCICIOS resueltos

7. Halla el cociente y el resto de la división de $P(x)$ entre $Q(x)$ en cada caso
 a) $P(x)=3x^2-11x-13$ $Q(x)=x^2-3x-4$ b) $P(x)=-9x^3-15x^2+8x+16$ $Q(x)=3x+4$
 Sol. Cociente=3 Resto= $-2x-1$ Sol. Cociente= $-3x^2-x+4$ Resto=0

8. Aplica la regla de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+5x^2-2x+1$, $Q(x)=2x^4-5$ y $R(x)=x^3-4x+3x^2$ entre $x-3$

$\begin{array}{r} 1 \quad 5 \quad -2 \quad 1 \\ 3) \quad \quad 3 \quad 24 \quad 66 \\ \hline 1 \quad 8 \quad 22 \quad 67 \\ \hline \text{Cociente } x^2+8x+22 \\ \text{Resto } 67 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -5 \\ 3) \quad \quad 6 \quad 18 \quad 54 \quad 162 \\ \hline 2 \quad 6 \quad 18 \quad 54 \quad 157 \\ \hline \text{Cociente } 2x^3+6x^2+18x+54 \\ \text{Resto } 157 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad -4 \quad 0 \\ 3) \quad \quad 3 \quad 18 \quad 42 \\ \hline 1 \quad 6 \quad 14 \quad 42 \\ \hline \text{Cociente } x^2+6x+14 \\ \text{Resto } 42 \end{array}$
--	--	--

9. Aplica la regla de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+3x^2-2x+1$, $Q(x)=x^4-2$ y $R(x)=x^3-4x^2-x$ entre $x+1$

$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad -2 \quad 1 \\ -1) \quad \quad -1 \quad -2 \quad 4 \\ \hline 1 \quad 2 \quad -4 \quad 5 \\ \hline \text{Cociente } x^2+2x-4 \\ \text{Resto } 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \\ -1) \quad \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline \text{Cociente } x^3-x^2+x-1 \\ \text{Resto } -1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \quad -4 \quad -1 \quad 0 \\ -1) \quad \quad -1 \quad 5 \quad -4 \\ \hline 1 \quad -5 \quad 4 \quad -4 \\ \hline \text{Cociente } x^2-5x+4 \\ \text{Resto } -4 \end{array}$
--	--	---

10. Si el valor numérico de un polinomio en 2 es igual a 3 y el cociente de su división de entre $x-2$ es x ¿Sabes de que polinomio se trata?

Dividendo = divisor·cociente +resto, el divisor es $x-2$, el cociente x y el resto 3, por tanto el polinomio es x^2-2x+3

11. Halla m para que mx^2+2x-3 sea divisible entre $x+1$

El polinomio será divisible entre $x+1$ si su valor en -1 es 0, luego ha de ser $m-2-3=0$, es decir, $m=5$

12. Aplica el Teorema del resto y la regla de Ruffini para hallar el valor numérico de $P(x)=x^3-15x^2+24x-3$ en $x=13$

Aplicando la regla de Ruffini por $x-13$ da de resto -29 , que es el valor numérico pedido.

13. ¿Existe algún valor de m para que el polinomio $x^3+mx^2-2mx+5$ sea divisible por $x-2$?

Por el teorema del resto basta resolver la ecuación $2^3+m\cdot 2^2-2m\cdot 2+5=0$, lo que da una igualdad imposible $13=0$, por tanto no hay ningún valor de m para el cual el polinomio sea divisible por $x-2$

Polinomios

3. Descomposición factorial

Sacar factor común una potencia de x

Al descomponer un polinomio en factores lo primero que tendremos que observar es si se puede sacar factor común de todos los sumandos alguna potencia de x.

Esto será posible solo cuando el coeficiente de grado cero del polinomio sea nulo.

En la parte inferior puedes practicar esta extracción.

También es interesante que busques, si es posible el m.c.d. de los coeficientes y lo extraigas como factor así en

$$6x^5 + 15x^2$$

se puede sacar factor común $3x^2$,

$$6x^5 + 15x^2 = 3x^2(2x^3 + 5)$$

Polinomios de 2º grado

Recuerda la fórmula para resolver la ecuación de 2º grado $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A $b^2 - 4ac$ se le llama discriminante de la ecuación y se suele designar por Δ .

Esto determina la descomposición factorial de los polinomios de 2º grado:

Las soluciones de $2x^2 - 8x + 6 = 0$ son 1 y 3, luego $2x^2 - 8x + 6 = 2 \cdot (x-1) \cdot (x-3)$, discriminante positivo.

Las soluciones de $3x^2 + 6x + 3 = 0$ son 1 y 1, luego $3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2$, $\Delta = 0$.

Las soluciones de $2x^2 + 6 = 0$ no son reales, $b^2 - 4ac$ es negativo, $2x^2 + 6$ no descompone.

$-2x^2 + 20x - 48 = 0$

Paso 1: Identificar a, b y c

$a = -2$; $b = 20$; $c = -48$

Paso 2: Aplicar la fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (20)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-48) = 16$

Paso 3: Estudiar el número de soluciones

$\Delta > 0$ Hay dos soluciones distintas puedes comprobar que son 6 y 4

Descomposición

$-2x^2 + 20x - 48 = -2 \cdot (x-6) \cdot (x-4)$

$2x^9 + x^6 - 3x^4 =$

$= 2 \cdot x^4 \cdot x^5 + x^4 \cdot x^2 - 3 \cdot x^4$

x^4 está en todos los sumandos.

$2x^9 + x^6 - 3x^4 =$

$= x^4 \cdot (2x^5 + x^2 - 3)$

Se ha sacado factor común una potencia de x.

$3x^2 + 54x + 243 = 0$

Paso 1: Identificar a, b y c

$a = 3$; $b = 54$; $c = 243$

Paso 2: Aplicar la fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (54)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (243) = 0$

Paso 3: Estudiar el número de soluciones

$\Delta = 0$ Hay dos soluciones iguales puedes comprobar que es -9

Descomposición

$3x^2 + 54x + 243 = 3 \cdot (x+9)^2$

$-3x^2 + 4x - 8 = 0$

Paso 1: Identificar a, b y c

$a = -3$; $b = 4$; $c = -8$

Paso 2: Aplicar la fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-8) = -80$

Paso 3: Estudiar el número de soluciones

$\Delta < 0$ No hay solución

Descomposición

$-3x^2 + 4x - 8$ no descompone

Raíz	Raíz
2	-2
Divisor	Divisor
x - 2	x + 2

Regla de Ruffini reiterada

Si $x-a$ es un divisor del polinomio $P(x)$, se dice que **a es raíz** de $P(x)$, por el teorema del resto sabemos que esto equivale a decir que $P(a)=0$.

$$P(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0 \text{ y a raíz de } P(x),$$

$$p_n a^n + p_{n-1} a^{n-1} + \dots + p_1 a + p_0 = 0,$$

y despejando p_0

$$p_0 = -p_n a^n - p_{n-1} a^{n-1} - \dots - p_1 a$$

Por tanto, si los coeficientes de $P(x)$ son números enteros y a también, p_0 es múltiplo de a .

Las **raíces** enteras no nulas de un polinomio con coeficientes enteros, son **divisores del coeficiente de menor grado** del polinomio.

La descomposición de un polinomio de tercer grado con raíces 4, 1 y -2 será $a \cdot (x-4) \cdot (x-1) \cdot (x+2)$. Se llama **multiplicidad** de una raíz al número de veces que aparece en la descomposición.

Descomposición factorial de $x^4 - 15x^2 + 10x + 24$

Las posibles raíces racionales de este polinomio son los divisores de 24

$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 6 \pm 8 \pm 12 \pm 24$

Con la regla de Ruffini vamos viendo qué divisores son raíces

	1	0	-15	10	24
-1)	-1		1	14	-24
2)	1	-1	-14	24	0
		2	2	-24	
3)	1	1	-12	0	
		3	12		
	1	4	0		

$$x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x+4)$$

Identidades notables

Suma al cuadrado

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Demostración

$$\begin{array}{r} \quad a \quad b \\ x \quad a \quad b \\ \hline \quad ab \quad b^2 \\ a^2 \quad ab \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

La suma al cuadrado es igual a
cuadrado del 1º
+doble del 1º por el 2º
+cuadrado del 2º

Suma por diferencia

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

La suma por diferencia es igual a la diferencia de cuadrados.

Diferencia al cuadrado

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

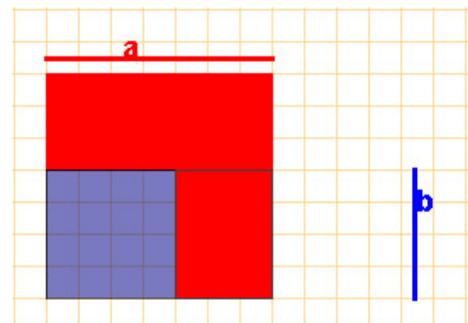
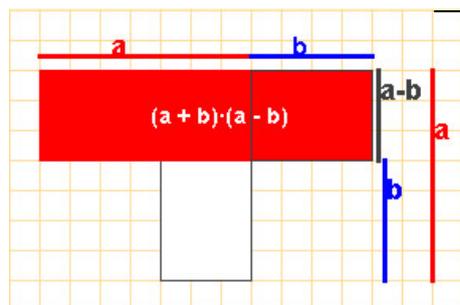
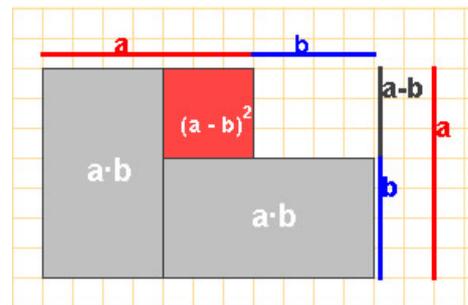
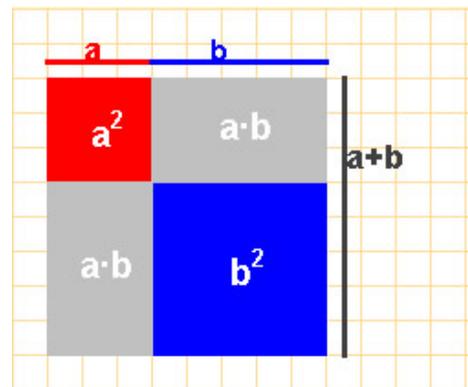
Demostración

$$\begin{array}{r} \quad a \quad -b \\ x \quad a \quad -b \\ \hline \quad -ab \quad b^2 \\ a^2 \quad -ab \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

La diferencia al cuadrado es igual a
cuadrado del 1º
+doble del 1º por el 2º
+cuadrado del 2º

Demostración

$$\begin{array}{r} \quad a \quad b \\ x \quad a \quad -b \\ \hline \quad -ab \quad -b^2 \\ a^2 \quad ab \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$



EJERCICIOS resueltos

14. Sacar factor común una potencia de x en cada uno de los siguientes polinomios:
 $P(x)=2x^3+3x$ $Q(x)=x^4+2x^6-3x^5$ $R(x)=2x^6+6x^5+8x^3$

Solución: $P(x)=x \cdot (2x^2+3)$ $Q(x)=x^4 \cdot (2x^2-3x+1)$ $R(x)=2x^3 \cdot (x^3+3x^2+4)$, en este último caso se ha podido sacar factor común también un número.

15. Halla la descomposición factorial de $x^3-7x^2+4x+12$

Las posibles raíces racionales de este polinomio son los divisores de 12

$$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 4 \quad \pm 6 \quad \pm 12$$

Con la regla de Ruffini miramos que divisores son raíces del polinomio

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 4 & 12 \\ -1) & & -1 & 8 & -12 \\ \hline & 1 & -8 & 12 & 0 \\ 2) & & 2 & -12 & \\ \hline & 1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$x^3-7x^2+4x+12=(x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-6)$$

16. Factoriza $2x^2-8x+6$; $-x^2+3x+4$; x^2+2x+3 ; x^2+6x+9 .

$2x^2-8x+6=2 \cdot (x-1) \cdot (x-3)$ pues $2x^2-8x+6=0$ tiene por soluciones $x=1$; $x=3$.

$-x^2+3x+4=-(x+1) \cdot (x-4)$ pues $-x^2+3x+4=0$ tiene por soluciones $x=-1$; $x=4$.

x^2+2x+3 no descompone pues su discriminante es <0

$x^2+6x+9=(x+3)^2$ pues su discriminante es 0, luego tiene una raíz doble: $x=-3$.

17. Halla la descomposición factorial de $x^7-x^6-4x^4$

$x^7-x^6-4x^4=x^4 \cdot (x^3-x^2-4)$. Se ha sacado factor común x^4 .

Las posibles raíces enteras de x^3-x^2-4 son los **divisores de -4**:

$$1, -1, 2, -2, 4, -4$$

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 1) & & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -4 \neq 0, \\ & & & & 1 \text{ no es raíz de P} \end{array}$$

Veamos por la Regla de Ruffini si -1 es raíz de P

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 0 & -4 \\ -1) & & -1 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & -6 \neq 0 \\ & & & & -1 \text{ no es raíz de P} \end{array}$$

Veamos por la Regla de Ruffini si 2 es raíz de P

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 2) & & 2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \\ & & & & 2 \text{ es raíz de P} \end{array}$$

$1 \quad 1 \quad 2 = x^2+x+2$ La ecuación $x^2+x+2=0$ no tiene soluciones reales, por tanto es primo

$$x^7-x^6-4x^4=x^4 \cdot (x-2) \cdot (x^2+x+2)$$

EJERCICIOS resueltos

18. Halla la descomposición factorial de x^4-4

Busquemos las raíces racionales de x^4-4 . Las posibles raíces en \mathbb{Q} son los cocientes de los divisores de -4 (coeficiente de menor grado) entre los divisores de 1 (coeficiente de mayor grado),

$$\text{divisores de } -4 \quad \pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 4$$

Es fácil ver con la regla de Ruffini que ninguno de los posibles valores son raíces de x^4-4 . El polinomio no tiene raíces racionales.

Si se reconoce x^4-4 como una diferencia de cuadrados, $(x^2)^2-2^2$ resultará fácil la descomposición factorial:
 $x^4-4=(x^2+2)\cdot(x^2-2)$
 El primer factor es primo, pero el segundo vuelve a ser una diferencia de cuadrados $x^2-2=(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$

$$x^4-4=(x^2+2)\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$$

19. Halla la descomposición factorial de $x^4+x^3-x^2-2x-2$

Las posibles raíces enteras de $x^4+x^3-x^2-2x-2$ son los **divisores de -2** :

$$1, -1, 2, -2$$

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ 1) & & 1 & 0 & -1 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & -3 & -5 \end{array}$$

-5 distinto de 0 , 1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si -1 es raíz de P

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1) & & -1 & 2 & -1 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -3 & 1 \end{array}$$

1 distinto de 0 , -1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si 2 es raíz de P

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ 2) & & 2 & 2 & 2 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}$$

-2 distinto de 0 , 2 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ -2) & & -2 & 6 & -10 & 24 \\ \hline & 1 & -3 & 5 & -12 & 22 \end{array}$$

22 distinto de 0 , -2 no es raíz de P

$$x^4+x^3-x^2-2x-2 \text{ No tiene raíces enteras}$$

No podemos hallar la descomposición factorial de este polinomio.



Para practicar

- Halla la expresión algebraica de un número de tres cifras si la cifra de las unidades es 4 veces la cifra de las decenas.
- ¿Cuál es el grado de $2x^5 - x^3 + 3x^2$? ¿Su coeficiente de grado 3? ¿y el de grado 2? Calcula su valor numérico en $x=2$
- Halla $P(x) \cdot 3 \cdot Q(x)$ siendo $P(x) = 4x^2 + 4x$ y $Q(x) = 6x^2 + 2x$.
- Multiplica los polinomios $P(x) = -3x^3 + 4x^2 - x - 2$ y $Q(x) = -x^2 + 7$.
- Halla el cociente y el resto de la división de $x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ entre $-x^2 + x - 1$.
- Haz la división de $x^3 + 4x^2 + 2x - 3$ entre $x - 2$ con la regla de Ruffini.
- Aplica el teorema del resto para calcular el resto de la división de $2x^3 - 2x^2 + x - 7$ entre $x - 5$.
- a) Halla m para que $x^3 + mx^2 - 2mx + 6$ sea divisible por $x + 2$
b) Halla m para que $x^3 + mx^2 - 8mx + 4$ sea divisible por $x - 1$.
- Efectúa las potencias
 - $(3x + 2)^2$
 - $(2x - 4)^2$
 - $(x - 5)^2$
- Descomponer, aplicando las identidades notables, los polinomios:
 - $x^4 - 72x^2 + 36^2$
 - $x^4 - 16$
- Descomponer los siguientes polinomios, si es posible, aplicando la ecuación de segundo grado.
 - $3x^2 - 10x + 3$
 - $x^2 - 4x + 5$
- Simplifica las siguientes fracciones algebraicas
 - $\frac{x^2 + 8x + 16}{3x + 12}$
 - $\frac{3x^2 - 12}{x^2 - 4x + 4}$
 - $\frac{4x^2 + 4x + 1}{12x^2 - 3}$
- Saca factor común en $12x^{12} + 24x^{10}$
- Halla la descomposición en factores primos de los siguientes polinomios
 - $3x^8 - 39x^7 + 162x^6 - 216x^5$
 - $3x^9 + 12x^8 + 15x^7 + 6x^6$
- Un polinomio de grado 3 tiene por raíces -5 , 7 y 1 . Halla su descomposición factorial sabiendo que su valor en 2 es 128 .
- ¿Cómo realizas mentalmente el cálculo de $23^2 - 22^2$?

Para saber más



Los ordenadores, no usan el sistema decimal

Utilizan celdillas con un sistema más sencillo

El sistema binario

$$1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

1 0 0 1 1 0 1 1

Valor numérico en 2 de un polinomio

Al fin y al cabo un sistema más accesible para las máquinas

Un sistema de blanco y negro de si o no

0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31

Algunos juegos de magia se basan en este sistema

Pide a un compañero que memorice una figura del último cuadro pero que no diga cuál. Tu por telepatía la adivinarás. Pregúntale si la figura escogida está en cada una de las siguientes tarjetas

SI = 1

NO = 0

NO = 0

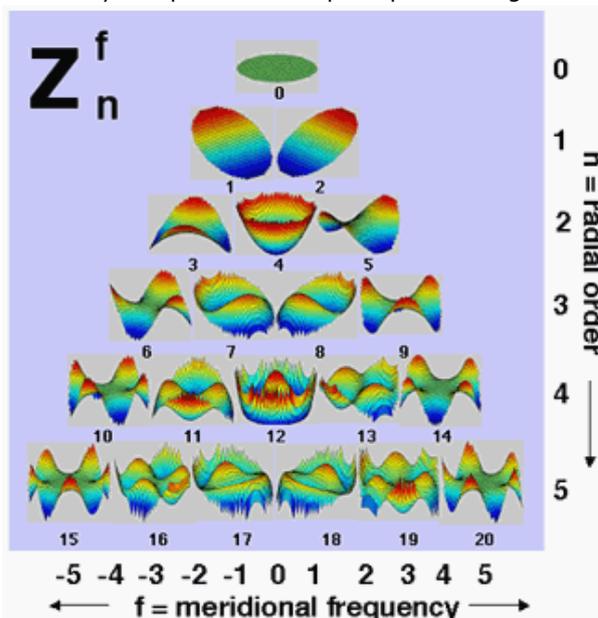
SI = 1

NO = 0

Con cada respuesta afirmativa escribe 1, con la negativa un 0, para el resultado 10010, la figura es la $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2 = 18$, el círculo verde. Solo hay que calcular el valor en 2 del polinomio cuyos coeficientes se obtienen con 1 o 0, con Sí o No.

Los polinomios en otras ciencias

Si investigas en la web, es probable que encuentres muchos polinomios con nombre propio: Polinomios de Lagrange, Hermite, Newton, Chebichev... copiamos aquí un extracto de un blog que habla de los polinomios de Zernike y su aplicación en óptica para corregir defectos visuales.



...Las matemáticas, con los polinomios de Zernike, nos ofrecen un método para descomponer superficies complejas en sus componentes más simples. Así, con este procedimiento matemático podemos jerarquizar y definir todas las aberraciones visuales. Un esquema que está presente con mucha frecuencia en las consultas de cirugía refractiva es el de las diferentes aberraciones agrupadas y jerarquizadas:

Lo de la jerarquía es fundamental, porque según cuál sea el grupo de la aberración, tendrá más o menos importancia, será más o menos fácil de corregir, etc. Por ejemplo, el número 4 corresponde a la miopía (y su inverso, la hipermetropía), y el 3 y 5 corresponden al astigmatismo...

Extracto de la página <http://ocularis.es/blog/?n=29>

Polinomios



Recuerda lo más importante

Expresión en coeficientes

$$-4x^3 - x^2 + 3$$

-4	-1	0	3
----	----	---	---

Regla de Ruffini. Teorema del resto
El resto de la división por x-a es el valor numérico del dividendo en a

3	-5	0	1	1	-2
-3	6				
1	0				
-1	2				
2	1				
-2	4				
5	resto				

T. del resto
 $5 = 3 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 1$

Regla de Ruffini

3	-5	0	1	
2	6	2	4	
3	1	2	5	resto

cociente

División de Polinomios

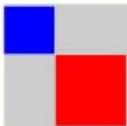
$12x^4 + 10x^3 + 15x^2 + 9x + 6$	$4x^2 + 2x + 3$
$-12x^4 - 6x^3 - 9x^2$	$3x^2 + x + 1$
$4x^3 + 6x^2 + 9x + 6$	cociente
$-4x^3 - 2x^2 - 3x$	
$4x^2 + 6x + 6$	
$-4x^2 - 2x - 3$	
$4x + 3$	

resto

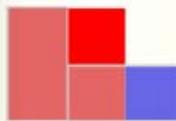
Raíces de un polinomio

Raíz 2	Raíz -2
$P(2) = 0$	$P(-2) = 0$
Divisor x-2	Divisor x+2

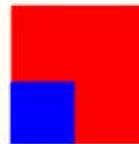
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$



Descomposición factorial

Los polinomios con coeficientes en IR **primos** son los de **grado uno** y los de **grado dos**, $ax^2 + bx + c$, con $b^2 - 4ac < 0$

Raíz de un polinomio
Raíz **a**
Divisor **x-a**
 $P(a) = 0$

Las raíces enteras de un polinomio son divisores del término independiente.

Para hallar la descomposición factorial de un polinomio se tendrán en cuenta las siguientes herramientas:

- Regla de Ruffini
- Ecuación de 2º grado
- Identidades notables

$$P(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 21x - 18$$

Probando la regla de Ruffini (con divisores de 18), encontramos que -1 y 2 son raíces de este polinomio

1	5	1	-21	-18
-1)	-1	-4	3	18
1	4	-3	18	0
2)	2	12	-18	
1	6	9	0	

$$P(x) = (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x^2 + 6x + 9)$$

$$P(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 21x - 18$$

$$P(x) = (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x^2 + 6x + 9)$$

El polinomio de segundo grado $x^2 + 6x + 9$ se puede descomponer resolviendo la ecuación $x^2 + 6x + 9 = 0$ que da una solución doble, -3, o se puede reconocer la identidad notable $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$
 $P(x) = (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x+3)^2$

Autoevaluación



1. Halla los coeficientes de $P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x)$ siendo $P(x) = 3x + 2$, $Q(x) = 2x^2 - 5$ y $R(x) = x^2 + 8x$.
2. Escribe los coeficientes del cociente y del resto en la división de $2x^3 - 5x^2 + 5$ entre $x^2 + 5$.
3. Calcula el valor numérico de $-3x^3 - 5x^2 + 3$ en $x = -1$.
4. ¿Es cierta la igualdad $2x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2$?
5. Calcula m para que el resto de la división de $4x^2 + mx + 1$ entre $x + 5$ sea 2.
6. Si $P(x) = ax^2 + bx + 5$ y $a \cdot 6^2 + b \cdot 6 = 3$, ¿cuál es el resto de la división de $P(x)$ entre $x - 6$?
7. Halla una raíz entera del polinomio $x^3 + 5x^2 + 8x + 16$.
8. Halla la descomposición factorial de $-4x^2 + 12x + 112$.
9. El polinomio $5x^3 + 9x^2 - 26x - 24$ tiene por raíces 2 y -3 . ¿Cuál es la otra raíz?
10. Las raíces de un polinomio de grado 3 son -6 , 0 y 4. Calcula el valor numérico del polinomio en 2 sabiendo que su coeficiente de mayor grado es 3.

Soluciones de los ejercicios para practicar

- $100x+14y$
- grado 5; c. gr $3 \rightarrow -1$; c. gr $2 \rightarrow 3$;
v.n. en $2 \rightarrow 68$
- $-14x^2-2x$
- $3x^5-4x^4-20x^3+30x^2-7x-14$
- Cociente $-x-3$ Resto $7x-10$
- Cociente $x^2+6x+14$ Resto 25
- -33
- a) $1/4$ b) $5/7$
- a) $(3x+2)^2=9x^2+12x+4$
b) $(2x-4)^2=4x^2-16x+16$
c) $(x-5)^2=x^2-10x+25$
- a) $(x+6)^2 (x-6)^2$
b) $(x+4)(x-2)(x^2+4)$
- a) $3(x-1/3)(x-3)$
b) No descompone
- a) $(x+4)/3$
b) $3(x+2)/(x-2)$
c) $(2x+1)/(3 \cdot (2x-1))$
- $12x^{10} \cdot (x^2+2)$
- a) $3x^5(x-3)(x-4)(x-6)$
b) $3x^6(x+2)(x+1)^2$
- $2(x+5)(x-7)(x-1)$
- $23^2-22^2=(23+22) \cdot (23-22)=45$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

- $9 \ 30 \ 1 \ -10$
- Cociente $2x-5$, resto $-10x+30$
- 1
- No, $(2x+5)^2=4x^2+20x+25$
- $m=19,8$
- 8
- -4
- $-4(x+4) \cdot (x-7)$
- $-0,8$
- -96

No olvides enviar las actividades al tutor ►