

## Objectius

En aquesta quinzena aprendràs a:

- Reconèixer una successió de nombres.
- Reconèixer i distingir les progressions aritmètiques i geomètriques.
- Calcular el terme general d'una progressió aritmètica i geomètrica.
- Trobar la suma dels termes d'una progressió aritmètica finita i geomètrica finita o infinita.
- Trobar el producte dels termes d'una progressió geomètrica finita.
- Resoldre problemes amb l'ajut de les progressions.
- Resoldre problemes d'interès compost.

Abans de començar.

1. Succession ..... pàg. 74  
Definició. Regla de formació  
Terme general

2. Progressions Aritmètiques ..... pàg. 75  
Definició  
Terme general  
Suma de n termes

3. Progressions Geomètriques ..... pàg. 77  
Definició  
Terme general  
Suma de n termes  
Suma de tots els termes  
Producte de n termes

4. Aplicacions ..... pàg. 79  
Interpolació  
Interès Compost  
Resolució de problemes

Exercicis per practicar

Per saber-ne més

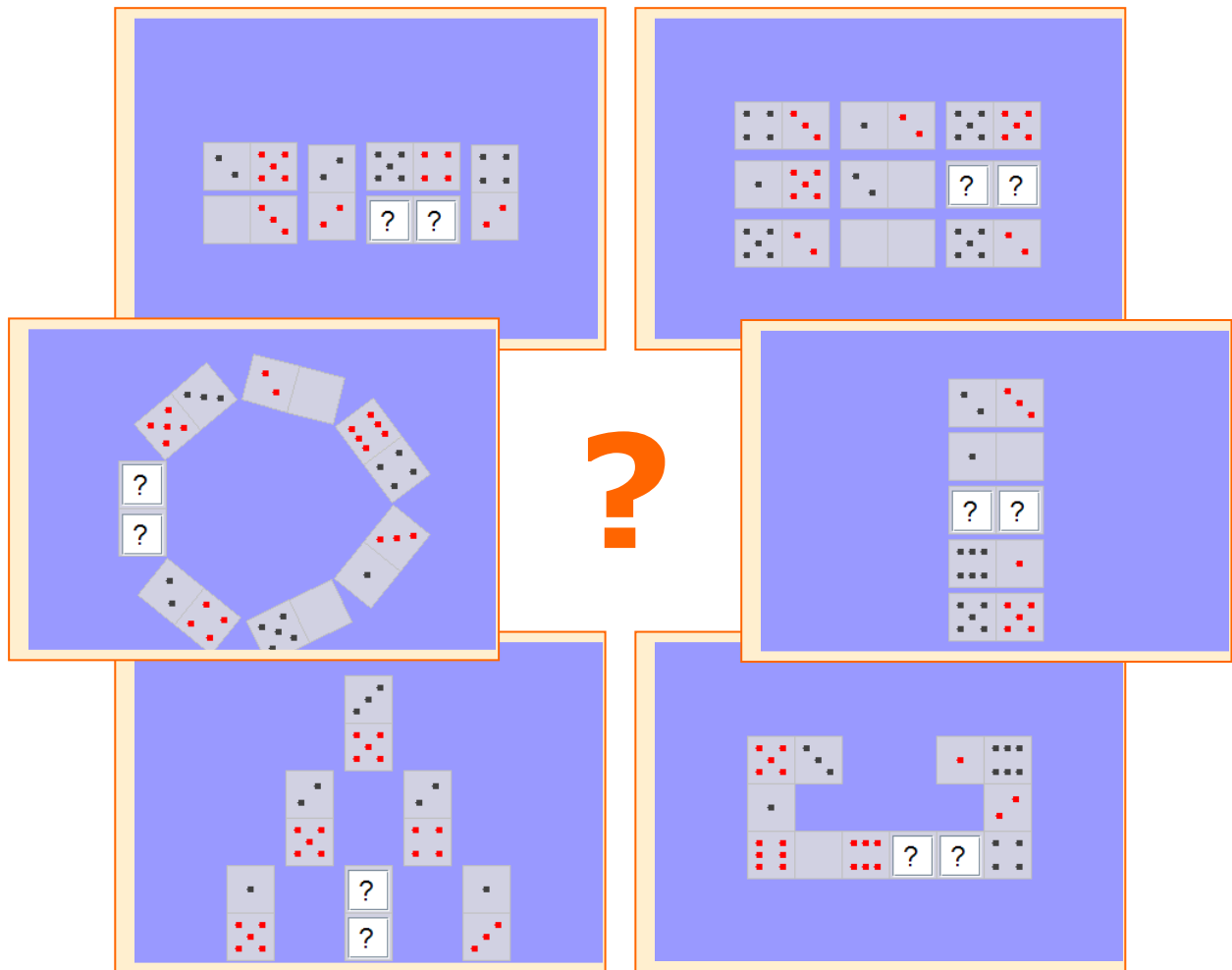
Resum

Autoavaluació

Activitats per enviar al tutor



## Abans de començar



**Per començar**, et proposem un joc senzill, es tracta d'esbrinar la fitxa de dòmino que falta en cada cas.

# Progressions

## 1. Successions

### Definició.

Una **successió** és un conjunt ordenat de nombres reals:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$$

Cada element de la successió es diu **terme** de la successió. Per escriure'ls es fan servir subíndexs.

Els termes de les successions es poden determinar a partir d'un determinat criteri, que es diu **regla de formació**.

### Terme general

- Diem **terme general** d'una successió al que ocupa un lloc qualsevol, **n**, s'escriu **a<sub>n</sub>**.
- En algunes successions, el **terme general** és una expressió algebraica, que ens permet saber qualsevol terme de la successió si coneixem el lloc que ocupa, **n**.
- En d'altres, cada terme s'obté a partir dels anteriors, es diu que estan donades en forma recurrent. Una **relació de recurrència** és una expressió algebraica, que dona el terme **n** en funció dels anteriors.

**4, 7, 10, 13,...**

Primer terme:  $a_1=4$   
Segon terme:  $a_2=7$   
Tercer terme:  $a_3=10$   
Quart terme:  $a_4=13$

*Cada terme s'obté de l'anterior sumant-li 3.*

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 3 = 4 + 3 = 7 \\ a_3 &= a_2 + 3 = 7 + 3 = 10 \\ a_4 &= a_3 + 3 = 10 + 3 = 13 \end{aligned}$$

**4, 8, 12, 16,...**

*Cada terme s'obté multiplicant el lloc que ocupa per 4*

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \cdot 4 = 4 & a_2 &= 2 \cdot 4 = 8 \\ a_3 &= 3 \cdot 4 = 12 & a_4 &= 4 \cdot 4 = 16 \end{aligned}$$

### EXERCICIS resolts

1. El primer terme d'una successió és 4. Escriu els seus quatre primers termes si: "Cada terme és igual a l'anterior més el lloc que ocupa":

$$\text{Sol: } a_1 = 4 \quad a_2 = 4 + 2 = 6 \quad a_3 = 6 + 3 = 9 \quad a_4 = 9 + 4 = 13$$

2. Escriu la regla de formació de la successió següent: 3, 8, 13, 18,...

$$\text{Sol: "Cada terme és igual a l'anterior més 5"}$$

3. Escriu els cinc primers termes de la successió formada pels quadrats dels nombres naturals

$$\text{Sol: } a_1 = 1 \quad a_2 = 2^2 = 4 \quad a_3 = 3^2 = 9 \quad a_4 = 4^2 = 16 \quad a_5 = 5^2 = 25$$

4. Calcula els 4 primers termes de la successió de terme general:  $a_n = \frac{n}{n+1}$

$$\text{Sol: } a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} \quad a_3 = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4} \quad a_4 = \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5}$$

5. Escriu els 5 primers termes d'una successió amb regla de formació: "Cada terme és la suma dels dos anteriors"  $a_1 = 3$  i  $a_2 = 7$

$$\text{Sol: } a_1 = 3 \quad a_2 = 7 \quad a_3 = 3 + 7 = 10 \quad a_4 = 7 + 10 = 17 \quad a_5 = 10 + 17 = 27$$

6. Escriu el terme general d'aquestes dues successions:

$$\text{a) } 2, 3, 4, 5, 6, \dots \quad \text{Sol: } a_n = 1 + n \quad \text{b) } 2, 4, 8, 16, 32, \dots \quad \text{Sol: } a_n = 2^n$$

## 2. Progressions Aritmètiques

### Definició

- Una **progressió aritmètica** és una successió en què cada terme (llevat del primer) s'obté sumant a l'anterior una quantitat fixa, **d**, que es diu **diferència** de la progressió.
- Si **d > 0** els nombres cada cop són més grans, es diu que la progressió és **creixent**.
- Si **d < 0** els nombres cada cop són més petits, es diu que la progressió és **decreixent**.

$$2, 5, 8, 10, \dots \rightarrow d = 2 > 0$$

Creixent

$$7, 5, 3, 1, \dots \rightarrow d = -2 < 0$$

Decreixent

Per a obtenir la diferència només cal restar dos termes consecutius.

**3, 5, 7, 9, 11, ...**

$$a_1 = 3 \quad d = 2$$

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 2$$

Així per exemple:

$$a_{10} = 3 + 9 \cdot 2 = 21$$

$$a_{100} = 3 + 99 \cdot 2 = 201$$

### Terme general

En una progressió aritmètica cada terme és igual a l'anterior més la diferència. Observa:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2 \cdot d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2 \cdot d + d = a_1 + 3 \cdot d$$

$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3 \cdot d + d = a_1 + 4 \cdot d$$

i així successivament, arribem a:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

El **terme general** d'una **progressió aritmètica** és:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

on **a<sub>1</sub>** és el primer terme i **d** la diferència.

### Suma de n termes

En una progressió aritmètica finita de n termes, la suma de termes equidistants dels extrems és igual a la suma d'aquests extrems.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$$

Si apliquem aquesta propietat s'obté que la **suma**,  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , dels **n primers termes** d'una **progressió aritmètica**, és:

$$S = \frac{a_1 + a_n \cdot n}{2}$$

$$S = \frac{a_1 + a_n \cdot n}{2} = \frac{2 + 12 \cdot 6}{2} = 42$$

## EXERCICIS resolts

7. Determina la diferència de les progressions aritmètiques següents:

a) 1, 4, 7, 10, 13, ...      Sol:  $d = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$   
 $d = 13 - 10 = 10 - 7 = 7 - 4 = 4 - 1 = 3$

b) 8, 6, 4, 2, 0, ...      Sol:  $d = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$   
 $d = 0 - 2 = 2 - 4 = 4 - 6 = 6 - 8 = -2$

c) 2, 6, 10, 14, 18, ...      Sol:  $d = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$   
 $d = 18 - 14 = 14 - 10 = 10 - 6 = 6 - 2 = 4$

8. Escriu el terme general de les progressions aritmètiques següents:

a) 4, 6, 8, 10, ...      Sol:  $a_n = a_1 + (n - 1)d = 4 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 2$

b) 3, -1, -5, -9, ...      Sol:  $a_n = a_1 + (n - 1)d = 3 + (n - 1) \cdot (-4) = -4n + 7$

c) 5, 8, 11, 14, ...      Sol:  $a_n = a_1 + (n - 1)d = 5 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 2$

9. Calcular la suma dels 10 primers termes de la progressió aritmètica: 2, 4, 6, 8, 10, ...

$$a_{10} = a_1 + (10 - 1)d = 2 + 9 \cdot 2 = 20$$

Sol:  $S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2 + 20}{2} \cdot 10 = 11 \cdot 10 = 110$

10. Calcular la suma dels 20 primers termes de la progressió aritmètica: 3, 7, 11, 15, 19, ...

$$a_{20} = a_1 + (20 - 1)d = 3 + 19 \cdot 2 = 41$$

Sol:  $S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{3 + 41}{2} \cdot 20 = 22 \cdot 20 = 440$

11. El primer terme d'una progressió aritmètica de diferència 5 és 4 i l'últim terme és 499. Calcula la suma de tots els termes.

$$a_1 = 4 \quad d = 5 \rightarrow 4, 9, 14, 19, \dots$$

Hem de calcular el nombre de termes

Sol:  $a_n = a_1 + (n - 1)d \rightarrow 499 = 4 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 1$

$$5n = 500 \rightarrow n = 100$$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{4 + 499}{2} \cdot 100 = \frac{503}{2} \cdot 100 = 25150$$

## 3. Progressions Geomètriques

**3, 6, 12, 24, 48, ...**

raó=2

$$r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = 2$$

**1, 3, 9, 27, 81, ...**

$r=3$     $a_1=1$

$$a_n = 3^{n-1}$$

1, 2, 4, 8, 16, 32    $r = 2$  ;  $n = 6$

$$S = \frac{a_n \cdot r - 1}{r - 1} = \frac{32 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = \frac{63}{1} = 63$$

$$S = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} = \frac{1 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} = \frac{63}{1} = 63$$

16, 8, 4, 2, 1, .....;    $r = \frac{1}{2}$

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{16}{\frac{1}{2}} = 32$$

**1, 2, 4, 8, 16, 32**

$$1 \cdot 32 = 32$$

$$2 \cdot 16 = 32$$

$$4 \cdot 8 = 32$$

$$P = \sqrt{(1 \cdot 32)^6} = \sqrt{2^{30}} = 2^{15}$$

### Definició

Una **progressió geomètrica** és una successió en què cada terme (llevat del primer), s'obté multiplicant l'anterior per una quantitat fixa **r**, que es diu **raó** de la progressió.

La raó s'obté en fer el quocient entre dos termes consecutius:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

### Terme General

En una progressió geomètrica cada terme és igual a l'anterior multipicat per la raó:

$$a_2 = a_1 \cdot r \quad a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 = a_1 \cdot r^3$$

i si seguim així, s'obté:

El **terme general d'una progressió geomètrica** de primer terme **a<sub>1</sub>** i raó **r** és:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

### Suma de n termes

La **suma dels n primers termes** d'una **progressió geomètrica** de raó **r** és:

$$S = \frac{a_n \cdot r - 1}{r - 1} \quad \text{o bé} \quad S = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$$

### Suma de tots els termes

La **suma dels infinits termes** d'una **progressió geomètrica** de raó **r**, és:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

### Producte de n termes

En una progressió geomètrica el producte dels termes equidistants dels extrems és igual al producte dels extrems:  $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \dots$

A partir d'aquesta propietat s'obté que el producte dels **n primers termes** d'una **progressió**

**geomètrica** és:  $P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

## EXERCICIS resolts

12. Determina la raó de les progressions geomètriques següents:

a) 1, 2, 4, 8, 16, ...      Sol:  $r = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$   
 $r = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$

b) 81, 27, 9, 3, 1, ...      Sol:  $r = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$   
 $r = \frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{9}{27} = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$

13. Escriu el terme general de les progressions geomètriques següents:

a) 4, 12, 36, 108, ...      Sol:  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$

b) 8, 16, 32, 64, ...      Sol:  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 8 \cdot 2^{n-1} = 2^3 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+2}$

14. Calcula la suma dels 10 primers termes de la progressió geomètrica: 1, 2, 4, 8, 16, ...

Sol:  $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow S = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} = \frac{1 \cdot (2^9 - 1)}{2 - 1} = \frac{1024 - 1}{1} = 1023$

15. Calcula la suma dels termes d'una progressió geomètrica finita de primer terme 1, raó 3 i últim terme 243:

Sol:  $a_1 = 1$  ;  $a_n = 243$  ;  $r = 3 \rightarrow S = \frac{a_n \cdot r - a_1 \cdot n}{r - 1} = \frac{243 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = \frac{728}{2} = 364$

16. Calcula la suma de tots els termes de la progressió geomètrica: 8, 4, 2, 1, ...

Sol:  $a_1 = 8$  ;  $r = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$

17. Calcula el producte dels 8 primers termes de la progressió geomètrica:

$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$

$a_1 = \frac{1}{8}$  ;  $r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = 2$  ;  $a_8 = \frac{1}{8} \cdot 2^7 = 2^4 = 16$

Sol:  $P = \sqrt{(a_1 \cdot a_8)^8} = \sqrt{\left(\frac{1}{8} \cdot 16\right)^8} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16$



## 4. Aplicacions

### Interpolació

Interpolació significa col·locar uns altres nombres entre dos de donats. Donats dos nombres  $a$  i  $b$ ,

- **Interpolació  $n$  mitjans diferencials** entre  $a$  i  $b$  és trobar  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nombres de manera que  $a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$  formen una progressió **aritmètica**.
- **Interpolació  $n$  mitjans proporcionals** entre  $a$  i  $b$  és trobar  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nombres de manera que  $a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$  formen una progressió **geomètrica**.

Interpolació 4 mitjans diferencials entre 4 i 44.

$$4, x_1, x_2, x_3, x_4, 44$$

Progressió aritmètica

$$44 = 4 + (6-1) \cdot d \rightarrow 40 = 5d \rightarrow d = 8$$

$$4, 12, 20, 28, 36, 44$$

Interpolació 2 mitjans geomètrics entre 3 i 24.

$$3, x_1, x_2, 24$$

Progressió geomètrica

$$24 = 3 \cdot r^3 \rightarrow 8 = r^3 \rightarrow r = 2$$

$$3, 6, 12, 24$$

En quant es converteixen 2000 € al 4% anual durant 5 anys?

$$C_f = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

$$C_f = 2000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^5 = 2216,65 \text{ €}$$

### Interès Compost

Si en invertir un capital durant un període de temps  $t$ , a un rèdit  $r\%$ , no es retiren els interessos en acabar el període d'inversió sinó que s'afegeixen al capital diem que és un **interès compost**.

El capital final  $C_f$  obtingut en invertir un capital  $C$ , al rèdit  $r\%$ , durant  $t$  anys, a **interès compost** es calcula amb la fórmula:

$$C_f = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

Si el temps ve donat en mesos o dies, n'hi ha prou amb substituir  $r$  pel rèdit mensual o diari i  $t$  pel nre de mesos o dies.

### Resolució de problemes

Observa alguns exemples de problemes resolts amb progressions

✓ SOLUCIÓ

$$0,2\hat{=} = 0,2 + 0,02 + 0,002 + \dots = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \dots$$

És la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de primer terme 0,2 i raó 0,1.

$$S = \frac{0,2}{1 - 0,1} = \frac{0,2}{0,9} = \frac{2}{9}$$

✓ SOLUCIÓ

Les quantitats que ha donat: 10, 11, 12, ..., 26 formen una progressió aritmètica de primer terme 10 i diferència 1.

El total és la suma dels 17 termes:

$$S = \frac{10 + 26}{2} \cdot 17 = 306 \text{ €}$$

#### EXEMPLE 1

Troba la fracció generatriu de  $0,2\hat{=}$

#### EXEMPLE 2

Una persona fa almoïna durant 17 dies, el primer dia va donar 10€ i l'últim 26€, quant ha donat en total, si cada dia donava 1€ més que el dia abans?

## EXERCICIS resolts

18. Interpola 3 mitjans aritmètics entre 4 i 29

$$5, x_1, x_2, x_3, 29$$

$$\text{Sol: } 29 = 5 + (5 - 1) \cdot d \rightarrow 24 = 4d \rightarrow d = 6$$

$$x_1 = 5 + 6 = 11 \quad x_2 = 11 + 6 = 17 \quad x_3 = 11 + 6 = 17$$

19. Interpola 4 mitjans geomètrics entre 1 i 243:

$$2, x_1, x_2, x_3, x_4, 486$$

$$\text{Sol: } 486 = 2 \cdot r^5 \rightarrow 243 = 2 \cdot r^5 \rightarrow r = 3$$

$$x_1 = 2 \cdot 3 = 6 \quad x_2 = 6 \cdot 3 = 18 \quad x_3 = 18 \cdot 3 = 54 \quad x_4 = 54 \cdot 3 = 162$$

20. Calcular el capital obtingut en invertir 2000 € al 3 % d'interès compost anual durant 5 anys.

$$\text{Sol: } C_f = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 2000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^5 = 2318,55 \text{ €}$$

21. Un arbre de creixement ràpid multiplica la seva altura per 1'2 cada any. Si en començar l'any feia 0'75 m, quina altura tindrà d'aquí a 8 anys?

$$\text{Sol: } a_1 = 0'75 ; a_2 = 0'75 \cdot 1'2 ; a_3 = 0'75 \cdot 1'2^2 \dots \rightarrow a_8 = 0'75 \cdot 1'2^8 = 3'22 \text{ m}$$

22. Llancem una pilota al llarg d'un passadís. En cada bot que fa avança una distància igual a la meitat de la distància anterior. Si al vuitè bot caigués en un clot de terra i s'aturés, quina distància haurà recorregut si abans del primer bot ha recorregut 2 metres?

$$a_1 = 2 ; a_2 = 1 ; a_3 = \frac{1}{2} ; a_4 = \frac{1}{4}, \dots ; a_8 = \frac{1}{64}$$

Sol: La distància que ha recorregut és la suma de totes

$$S = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2\left(\frac{1}{256} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{2\left(\frac{-255}{256}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot 255 \cdot 2}{256} = \frac{255}{64} = 3'98 \text{ m}$$

## Per practicar



1. Completa les successions amb els termes que falten:
  - a) 3, 7, 11, 15, \_\_, \_\_, ....
  - b) 3, 6, 12, 24, \_\_, \_\_, ....
  - c) 32, 16, 8, 4, \_\_, \_\_, ....
  - d) 5, 10, 17, 26, \_\_, \_\_, ....
  
2. Calcula els 4 primers termes de la successió de terme general:
  - a)  $a_n = n + 5$
  - b)  $a_n = 2^{n-1}$
  - c)  $a_n = \sqrt[n+1]{n+2}$
  - d)  $a_n = 5n$
  
3. Calcula el terme general de les successions:
  - a) 1, 2, 3, 4, 5, ....
  - b) 1, 4, 9, 16, 25, ....
  - c)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$
  - d)  $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$
  
4. Troba el terme 100 de la successió de terme general:
  - a)  $a_n = 3n + 2$
  - b)  $a_n = \frac{2n+1}{n-1}$
  - c)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$
  
5. Esbrina la llei de recurrència de cadascuna de les successions:
  - a) 3, 7, 10, 17, 27, ....
  - b) 3, 6, 12, 24, 48, ....
  - c) 3, 7, 11, 15, 19, ....
  - d) 9, 3, 6, -3, 9, ....
  
6. Calcula el terme general de les progressions aritmètiques següents.
  - a) 4, 7, 10, 13, 16, ....
  - b) 1, 3, 5, 7, 9, ....
  - c) 7, 11, 15, 19, 23, ....
  - d) 3, 4, 5, 6, 7, ....
  
7. Calcula el terme general de les progressions geomètriques següents.
  - a) 4, 8, 16, 32, 64, ....
  - b) 1, 3, 9, 27, 81, ....
  - c) 16, 8, 4, 2, 1, ....
  - d)  $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \dots$
  
8. Calcula la diferència d'una progressió aritmètica si se'n coneixen:
  - a)  $a_{10} = 30$  i  $a_1 = -6$
  - b)  $a_{30} = 95$  i  $a_{20} = 45$

# Progressions

9. Calcula la raó d'una progressió geomètrica si se'n sap:
- a)  $a_9 = 80$  i  $a_8 = 16$
- b)  $a_{10} = 40$  i  $a_7 = 5$
10. Calcula el primer terme d'una progressió aritmètica si se'n sap:
- a)  $a_{20} = 34$  i  $d = 7$
- b)  $a_{31} = 13$  i  $d = 3$
11. Calcula el primer terme d'una progressió geomètrica si se'n sap:
- a)  $a_7 = 320$  i  $r = 2$
- b)  $a_6 = 915$  i  $r = 3$
12. Calcula el nombre de termes d'una progressió aritmètica finita si el primer és 100, l'últim 420 i la diferència és 4.
13. Calcula la suma dels primers 101 termes de la progressió: 1, 4, 7, 17, 20, ....
14. Calcula la suma dels múltiples de 3 menors que 1000 i majors que 100
15. Calcula la suma dels primers 8 termes de la progressió: 1, 2, 4, 8, 16, ....
16. Calcula el producte dels primers 8 termes de la progressió:  
 $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$
17. Calcula la suma dels infinits termes de la progressió: 16, 8, 4, 2, 1, ....
18. Calcula el producte dels primers 10 termes de la progressió 16, 8, 4, 2, 1, ....
19. Dipositem 6000 € al 5 % d'interès compost anual. Quants diners tindrem al cap de 3 anys?
20. Determina el capital que amb un interès compost del 5% anual, produeix 200 € en 4 anys.
21. Troba el capital obtingut en invertir 100 € al 3 % d'interès compost anual durant 4 anys.
22. Interpola 6 termes entre 1 i 10 perquè formin una progressió aritmètica.
23. Interpola 3 termes entre 1 i 16 perquè formin una progressió geomètrica.
24. En un examen la primera pregunta valia dos punts i cadascuna de les següents valia tres punts més que l'anterior. Si en total hi havia 50 preguntes, quants punts valia l'examen?
25. El nombre inicial de mosques d'una població és de 50 i cada tres dies es duplica el nombre de mosques. Quantes mosques hi haurà al cap de 30 dies?
26. Escriu la fracció generatriu de  $1\sqrt{2}$ , aplicant la suma d'una progressió.
27. En una progressió geomètrica el sisè terme val 64 i el quart és 16. Troba el terme general.
28. Els angles d'un triangle estan en progressió aritmètica. Si el més petit és de  $40^\circ$ , quina és la mesura dels altres dos?



## Per saber-ne més

### Successió de Fibonacci

Una de les successions més conegudes és la **successió de Fibonacci**.

**1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ....**

La successió és la solució al problema que es planteja a la seva obra ***Liber abaci***

*Una parella de conills triga un mes en arribar a l'edat fèrtil. Cada cop engendra una parella de conills que, a la vegada, quan són fèrtils engendren cada mes una parella de conills. Quantes parelles hi haurà al cap d'un nombre determinat de mesos?*

Mes	Pares	Fills	Nets	Besnets	Parelles
1	☺				1
2	☹				1
3	☹	☺			2
4	☹	☺ ☺			3
5	☹	☺ ☺ ☺	☺		5
6	☹	☺ ☺ ☺ ☺	☺ ☺ ☺		8
7	☹	☺ ☺ ☺ ☺ ☺	☺ ☺ ☺ ☺ ☺	☺	13

☺ Parella fèrtil      ☹ Parella no fèrtil

**Fórmula de recurrència:**

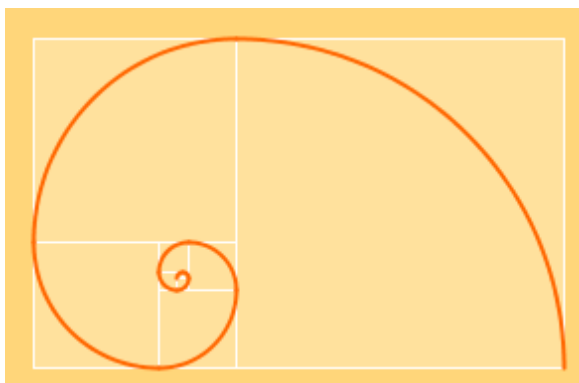
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

**Terme General:**

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$



### Espirale de Fibonacci



**Nombre d'or:**

Si dividim cada nombre per l'anterior, la successió de quocients s'acosta al nombre d'or:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



## Recorda el més important

### **Progressió Geomètrica**

És una successió tal que cada terme és igual a l'anterior multiplicat per una quantitat constant anomenada raó de la progressió.

**Terme general**  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

**Suma de n termes**  $S = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

$$S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

### **Suma dels infinits termes**

$$S = \frac{a_1}{1 - r} \quad -1 < r < 1$$

### **Termes equidistants dels extrems**

$$a_n \cdot a_1 = a_{n-1} \cdot a_2 = a_{n-2} \cdot a_3 = \dots$$

**Producte de n termes**  $P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

### **Progressió Aritmètica**

És aquella successió en què cada terme és igual a l'anterior més una quantitat constant anomenada diferència de la progressió.

**Terme general**  $a_n = a_1 + (n - 1)d$

### **Termes equidistants dels extrems**

$$a_n + a_1 = a_{n-1} + a_2 = a_{n-2} + a_3 = \dots$$

**Suma de n termes**  $S = \frac{a_1 + a_n}{2} n$

### **Successió:**

És un conjunt d'infinits nombres donats de manera ordenada.

### **Terme d'una successió:**

És cadascun dels nombres que la formen.

### **Successió decreixent:**

És aquella en què cada terme es menor que l'anterior.

### **Successió creixent:**

És aquella en què cada terme es major que l'anterior.

### **Interpolació**

Donats nombres  $a$  i  $b$ , interpolat  $n$  mitjans (diferencials o geomètrics) entre  $a$  i  $b$  és trobar  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nombres de forma que  $a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$  formen una progressió (aritmètica o geomètrica)

### **Interès Compost**

El capital final  $C_f$  obtingut en invertir un capital  $C_0$ , al rèdit  $r$  %, durant  $t$  anys, a interès compost ve donat per la fórmula:

$$C_f = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

## Autoavaluació



1. Escriu el terme 95 de la successió:  
 $\frac{10}{3}, \frac{11}{4}, \frac{12}{5}, \frac{13}{6}, \dots$
2. Escriu el terme general de la successió:  $-4, -7, -10, -13, \dots$
3. Escriu el terme general de la successió:  $1, 2, 4, 8, \dots$
4. Escriu el sisè terme de la successió:  $1, 4, 16, 64, \dots$
5. Troba la suma de tots els termes de la progressió:  
 $8, 4, 2, 1, \dots$
6. Troba la suma dels 100 primers termes de la progressió:  
 $1, 4, 7, 10, \dots$
7. Troba el producte dels 8 primers termes de la progressió:  
 $4096, 512, 64, 8, \dots$
8. Quants diners em tornarà el banc si faig una imposició de 3000 € a termini fix durant 5 anys al 3% d'interès compost anual?
9. Calcula la suma de tots els múltiples de 3 de tres xifres.
10. El pare d'en Joan decideix guardar un euro el dia que en Joan fa un any. Anirà duplicant la quantitat en tots els aniversaris del seu fill. Quants diners haurà estalviat el dia que faci 13 anys?

Solucions dels exercicis per practicar

- |  |  |
|--|--|
| 1. a) 19 i 23 b) 48 i 96<br>c) 2 i 1 d) 37 i 50  | 11. a) 5 b) 5  |
| 2. a) 6, 7, 8, 9, ... b) 1, 2, 4, 8, ...<br>c) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{6}, \dots$<br>d) 5, 10, 15, 20, ... | 12. 81   |
| 3. a) $a_n = n$ b) $a_n = n^2$<br>c) $a_n = \frac{1}{n}$ d) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$  | 13. 15100  |
| 4. a) $a_{100} = 302$ b) $a_n = \frac{201}{99}$<br>c) $a_n = \frac{1}{101}$  | 14. 165150   |
| 5. a) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ b) $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$<br>c) $a_{n+1} = a_n + 4$ d)<br>$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$             | 15. 511  |
| 6. a) $a_n = 3n + 1$ b) $a_n = 2n - 1$<br>c) $a_n = 4n + 3$ d) $a_n = n + 2$   | 16. 16   |
| 7. a) $a_n = 2^{n+1}$ b) $a_n = 3^{n-1}$<br>c) $a_n = 2^{5-n}$ d) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$                             | 17. 32   |
| 8. a) 4 b) 5   | 18. 1/32   |
| 9. a) 5 b) 2   | 19. 6945'75  |
| 10. a) -99 b) -77  | 20. 928'05   |
|  | 21. 112'55   |
|  | 22. $\frac{16}{7}, \frac{25}{7}, \frac{34}{7}, \frac{43}{7}, \frac{52}{7}, \frac{61}{7}$ |
|  | 23. 2, 4, 8  |
|  | 24. 3775   |
|  | 25. 16000  |
|  | 26. 11/9   |
|  | 27. $a_n = 2^n$  |
|  | 28. 60 i 80  |

Solucions  
AUTOAVALUACIÓ

1. 104/97
2.  $a_n = -1 - 3n$
3.  $a_n = 2^{n-1}$
4. 1024
5. 16
6. 14950
7. 4096
8. 3477'82
9. 165150
10. 8191

No oblidis enviar les activitats al tutor ►