6 Figuras planas, propiedades métricas

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer los ángulos importantes en una circunferencia y sus relaciones.
- Averiguar cuándo dos triángulos son semejantes.
- Utilizar el teorema de Pitágoras para resolver algunos problemas.
- Identificar la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo como conjuntos de puntos.
- Calcular el área de recintos limitados por líneas rectas y por líneas curvas.

Antes de empezar

1.Ángulos en la circunferencia ..... pág. 90
Ángulo central y ángulo inscrito

2.Semejanza ..... pág. 91
Figuras semejantes
Semejanza de triángulos, criterios.

3.Triángulos rectángulos ..... pág. 94
Teorema de Pitágoras
Aplicaciones del Teorema de Pitágoras

4.Lugares geométricos ..... pág. 96
Definición y ejemplos
Más lugares geométricos: las cónicas

5.Areas de figuras planas ..... pág. 98

Ejercicios para practicar

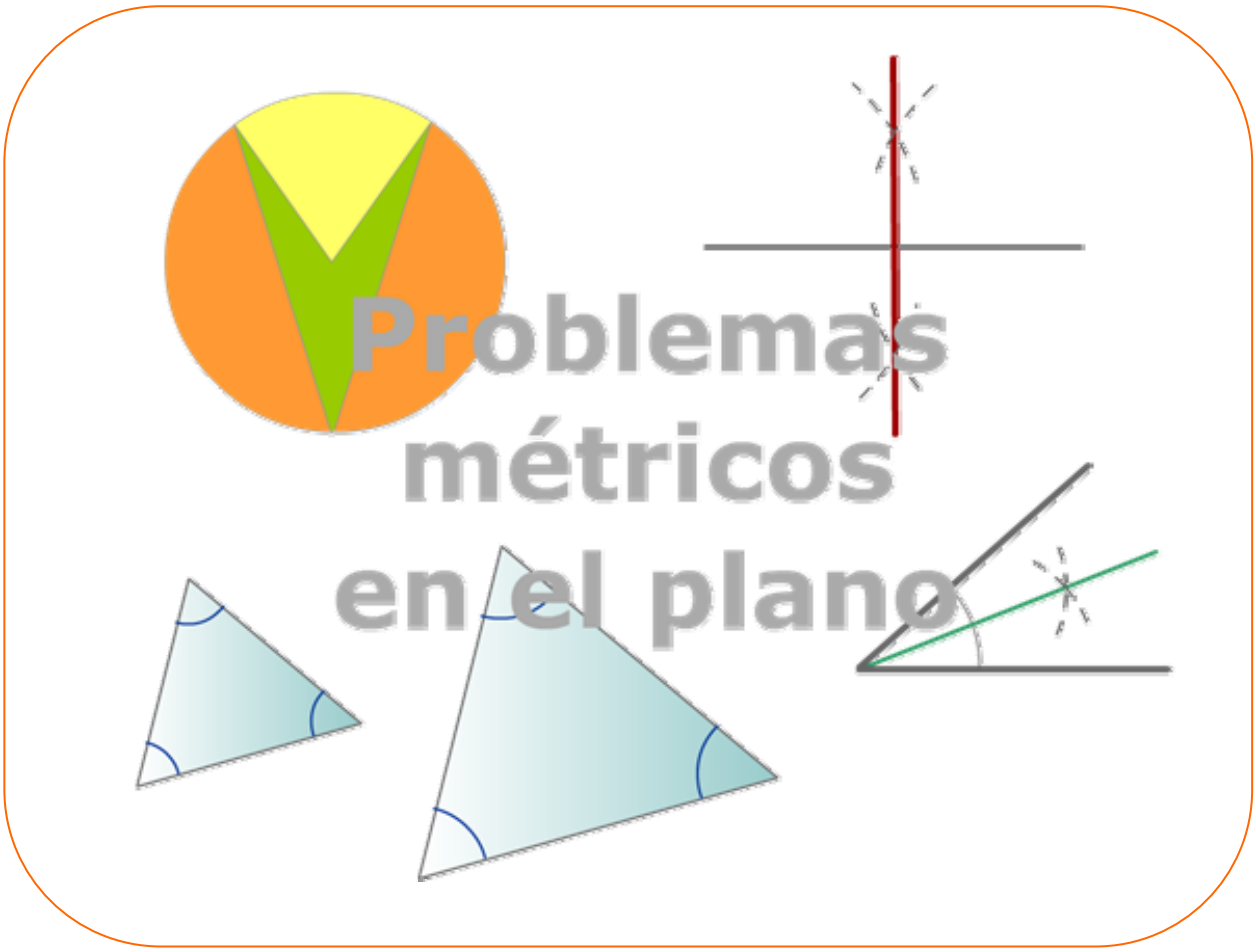
Para saber más

Resumen

Autoevaluación

Actividades para enviar al tutor

Antes de empezar



Recuerda una propiedad importante de los triángulos:

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º.

- ✓ Se traza una paralela a la base por el vértice opuesto.

  El ángulo a'=a, se dicen alternos internos. El ángulo c'=c por el mismo motivo.

  a' + b + c' =180º

  por tanto

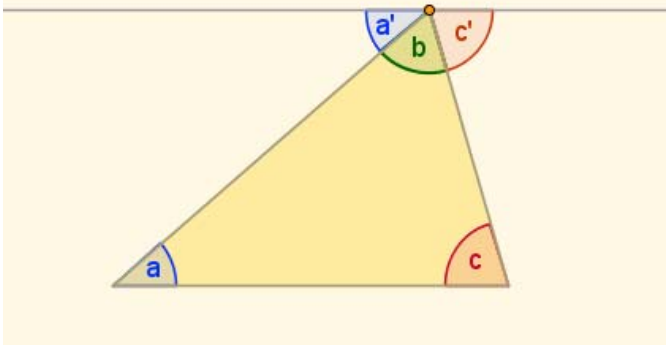
  a + b + c = 180º

a' + b + c' = 180º

a' = a c' = c

↓

a + b + c = 180º

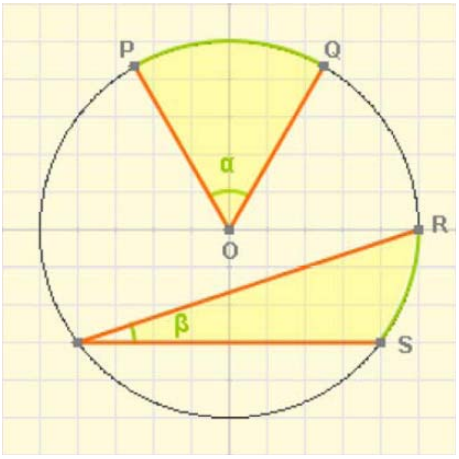


1. Ángulos en la circunferencia

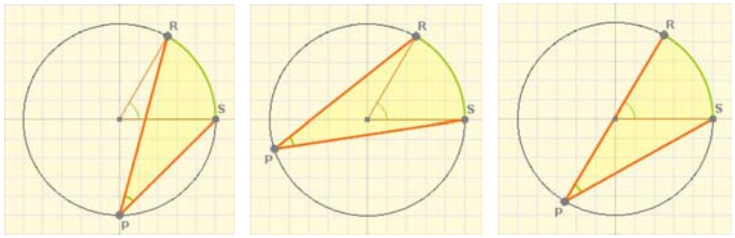
Ángulo central y ángulo inscrito

En la circunferencia de la escena de la derecha el ángulo α, que tiene su vértice en el centro de la circunferencia, se llama **ángulo central** y representa la medida angular del arco PQ.

El ángulo β, que tiene el vértice en la misma circunferencia, se llama **ángulo inscrito** y se dice que abarca el arco RS.



El **ángulo inscrito** que abarca un arco de circunferencia determinado, es igual a la **mitad del ángulo central** que abarca el mismo arco.



Aunque se cambie la posición del vértice P el ángulo no varía. Los ángulos inscritos que abarcan el mismo arco de circunferencia son iguales.

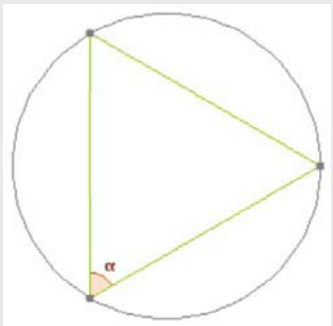
El ángulo central abarca una semicircunferencia, mide 180º, el ángulo inscrito es recto.



EJERCICIOS resueltos

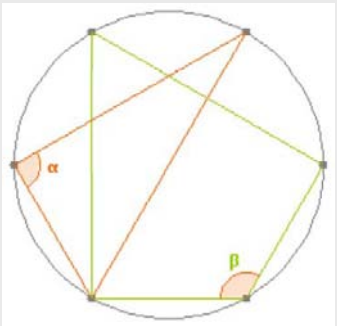
1. Calcula el valor del ángulo o los ángulos marcados en cada caso.

a) La circunferencia se ha dividido en 3 partes iguales



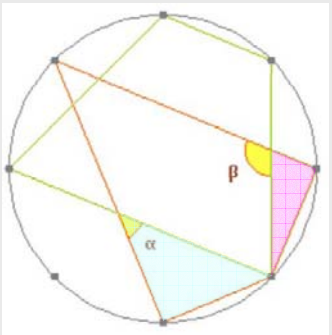
Sol: El ángulo α abarca 120º, su valor es la mitad, 60º.

a) La circunferencia se ha dividido en 6 partes iguales

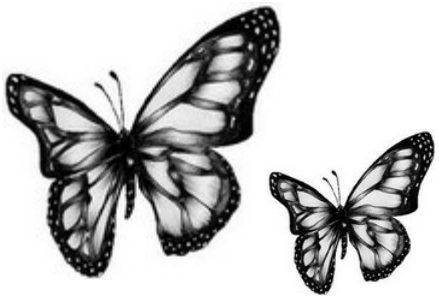


Sol: El ángulo α abarca 180º, su valor es la mitad, 90º.
El ángulo β abarca 240º, cuatro divisiones de la circunferencia, su medida es 120º.

a) La circunferencia se ha dividido en 8 partes iguales

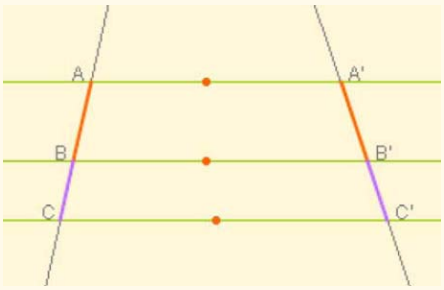


Sol: En el triángulo azul
B=90º, C=45º
α=180º-90º-45º=45º
En el triángulo rosa
B=22,5º y D=90º
β=90º+22,5º=112,5º

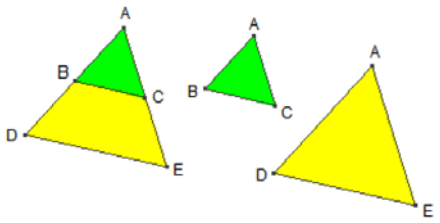


La semejanza está basada en el **Teorema de TALES**: dos rectas que cortan a varias paralelas determinan en estas segmentos proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$



Observa en la figura que los dos polígonos, verde y amarillo, tienen los ángulos iguales, y los lados proporcionales, son **semejantes**



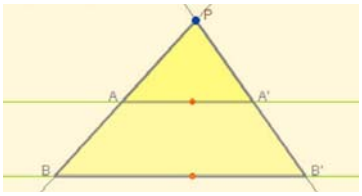
2. Semejanza

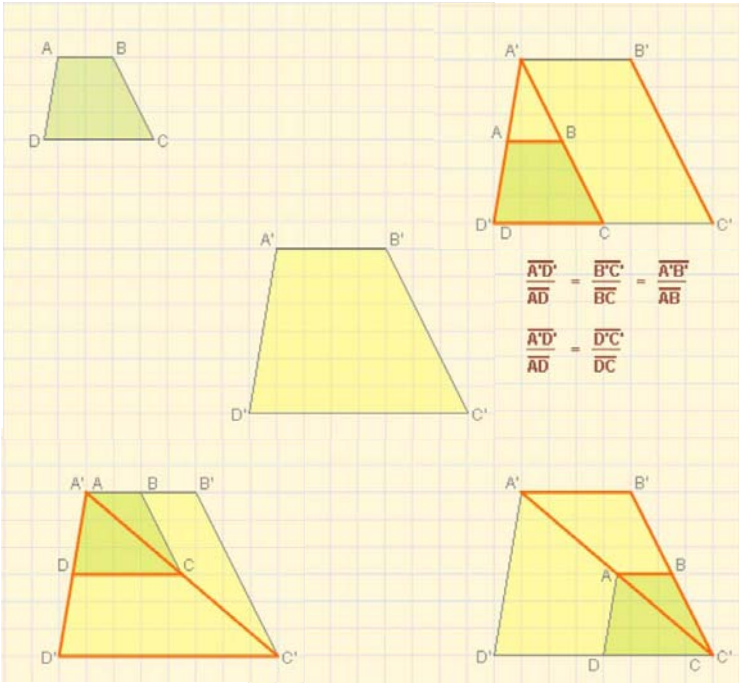
Figuras semejantes

Observa a la izquierda la pareja de **figuras semejantes**, tienen la **misma forma** pero están representadas con **tamaños diferentes**, una puede considerarse una ampliación de la otra.

- Dos figuras planas se consideran semejantes si existe la misma proporción, llamada **razón de semejanza**, entre sus lados homólogos y además sus ángulos homólogos son iguales.

Triángulos en posición de **Tales**: los lados homólogos son proporcionales, los ángulos son iguales. Son **semejantes**.





Semejanza de triángulos

Dos triángulos son **semejantes** si se pueden poner en **posición de Tales**. Como hemos visto en la sección anterior, esto significa que sus **lados homólogos** guardan la misma proporción y que **sus ángulos** son **iguales**.

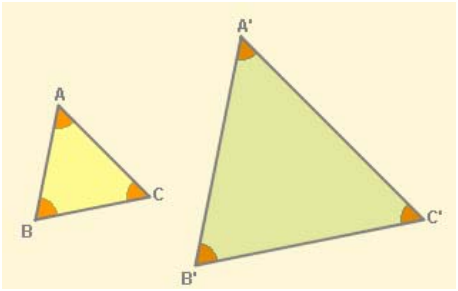
En el caso de los triángulos para que sean semejantes Bastará que se cumpla uno de los siguientes criterios:

Criterios de semejanza de triángulos

1) Si dos triángulos tienen los **ángulos iguales**, entonces son semejantes; bastará que tengan dos, el tercero es lo que falta hasta 180º.

2) Si dos triángulos tienen **un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales**, son semejantes.

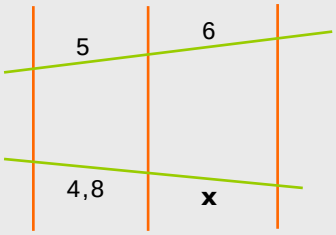
3) Si dos triángulos tienen sus tres **lados proporcionales**, entonces son semejantes.



EJERCICIOS resueltos

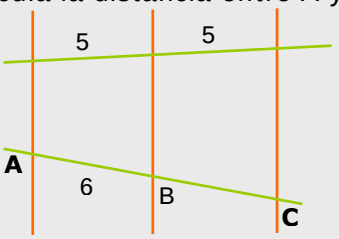
2. Las rectas de color naranja son paralelas

a) Calcula x



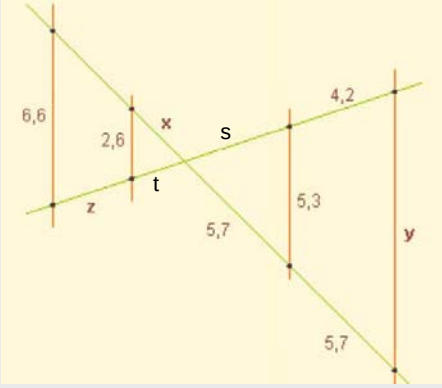
$$\frac{6}{5}=\frac{x}{4,8}\Rightarrow x=\frac{4,8\cdot 6}{5}=5,76$$

b) Calcula la distancia entre A y C.



Puesto que los segmentos homólogos son iguales $\overline{AB}=\overline{BC}=6$, luego $\overline{AC}=12$

3. Calcula x, y, z.



$$\frac{x}{5,7}=\frac{2,6}{5,3}\rightarrow x=\frac{5,7\cdot 2,6}{5,3}=2,8$$

$$\frac{5,7}{5,3}=\frac{2\cdot 5,7}{y}\rightarrow y=10,6$$

Para calcular z hay varias formas, por ejemplo:
El segmento s mide 4,2 ya que debe guardar la proporción con los que miden 5,7.

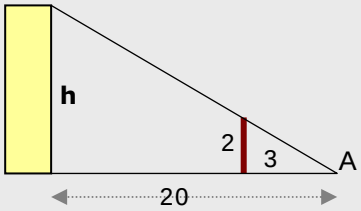
Se calcula t: $\frac{t}{2,6}=\frac{4,2}{5,3}\rightarrow t=2,06$

Y conocido t: $\frac{2,06}{2,6}=\frac{2,06+z}{6,6}\rightarrow z=3,17$

4. Desde el punto A se ven alineados los extremos del poste marrón y del edificio amarillo, ¿cuál es la altura de éste?

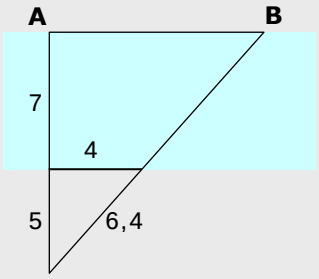
Como el edificio y el poste son paralelos según el teorema de Tales:

$$\frac{h}{2}=\frac{20}{3}\rightarrow h=\frac{20\cdot 2}{3}=13,3m$$



EJERCICIOS resueltos

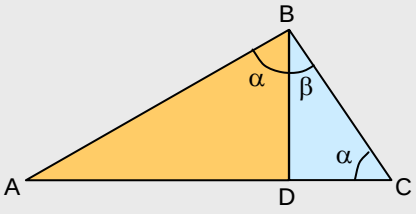
10. Calcula la distacia entre los puntos A y B situados al otro lado del río.



Por el Teorema de Tales: $\frac{7+5}{5} = \frac{AB}{4}$

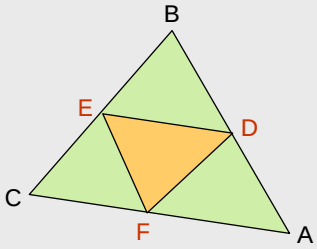
Luego $AB = \frac{48}{5} = 9{,}6$

11. En un triángulo rectángulo ABC (B=90º) se traza la altura sobre el lado AC, formándose así los triángulos también rectángulos, BDA y BCD, ¿son semejantes también estos triángulos?, ¿qué criterio aplicas?



En efecto son semejantes ya que tienen los ángulos iguales (primer criterio).
1) Ambos tienen un ángulo D=90º
2) El ángulo α es igual en ambos ya que es 90º-β. En el triángulo naranja se ve a simple vista y en el azul recuerda que la suma de los tres debe ser 180º por lo que $\alpha + \beta = 90º$

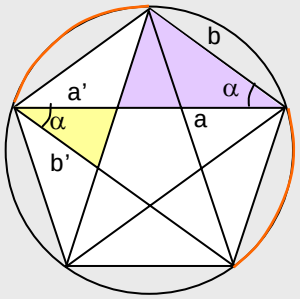
12. En un triángulo cualquiera ABC, se unen los puntos medios de los lados para formar otro triángulo DEF. ¿Son semejantes estos dos triángulos?, ¿qué criterio aplicas?.



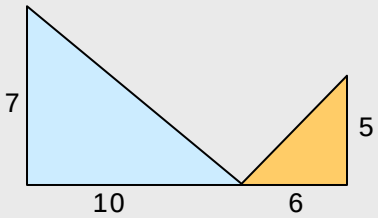
ABC y DEF son semejantes.
Observa que los triángulos ABC y DBE están en posición de Tales por lo que AC/DE=CB/EB=2 ya que E es el punto medio de BC.
Siguiendo el mismo razonamiento AB/EF=2 y BC/DF=2, por tanto los tres pares de ángulos guardan la misma proporción. (Criterio 3)

13. La figura era conocida en la antigüedad como "pentagrama pitagórico". En ella se pueden ver bastantes parejas de triángulos semejantes. Los de color amarillo y morado, ¿son semejantes?, ¿qué criterio aplicas?.

Son semejantes ya que los ángulos llamados α son iguales pues abarcan el mismo arco de circunferencia (360º/5). Además por el Teorema de Tales a/a' = b/b', por tanto los lados que forman el ángulo α son proporcionales. (Criterio 2º)



14. Los triángulos de la figura, ¿son semejantes?.



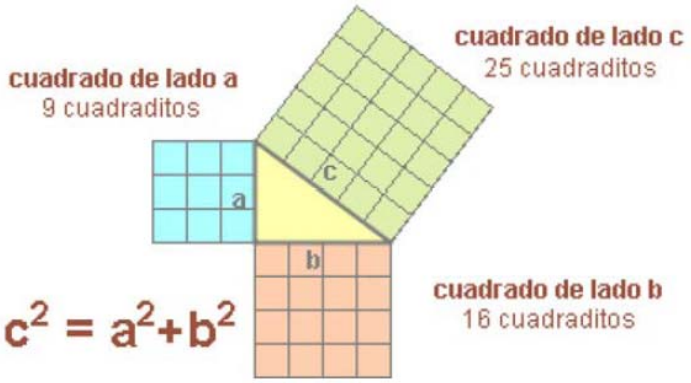
No son semejantes ya que los lados no son proporcionales,

$$\frac{10}{6} \neq \frac{7}{5}$$

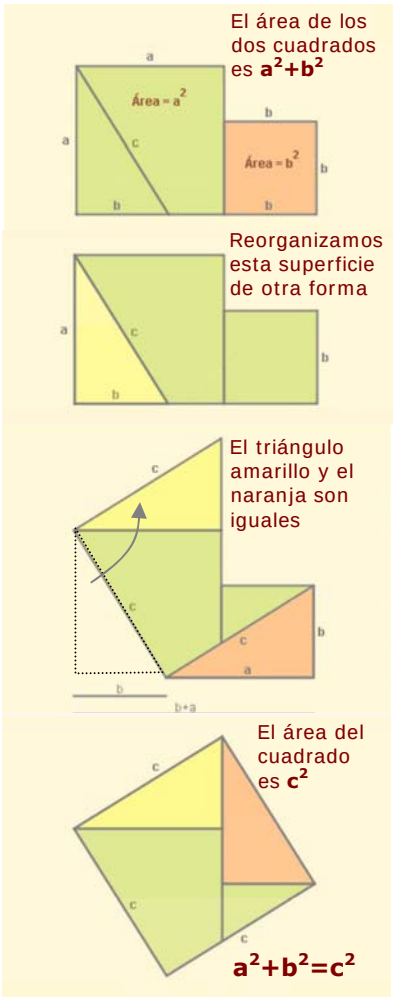
3. Triángulos rectángulos

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

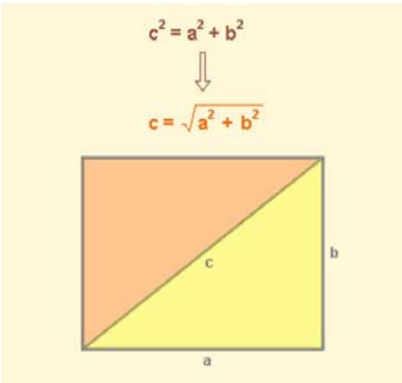


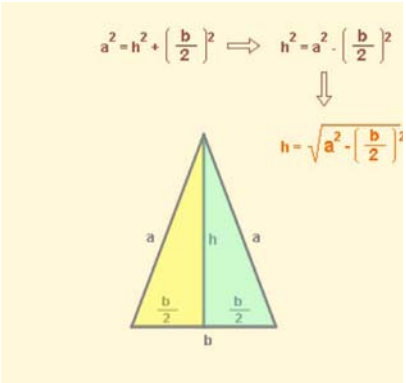
Observa la demostración de la derecha.



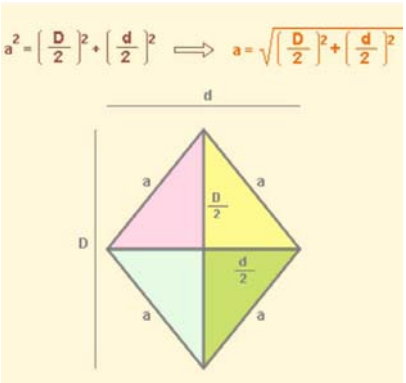
Aplicaciones del Teorema de Pitágoras

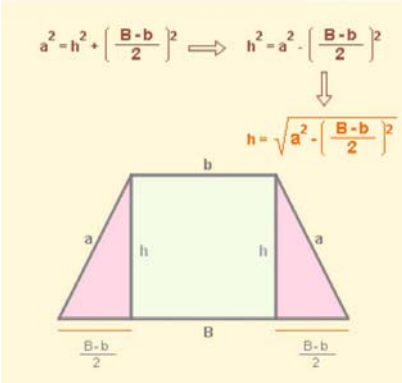
El **teorema de Pitágoras** es de gran utilidad en multitud de problemas en los que se presenta algún triángulo rectángulo. Aquí puedes ver algunos ejemplos.

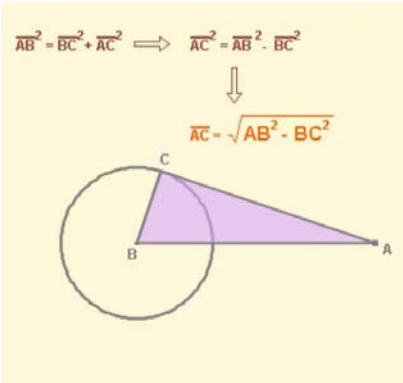




- Calcular la diagonal de un rectángulo.
- Calcular la altura en algunos triángulos.
- Calcular los lados de un rombo.
- Calcular la altura de un trapecio
- Calcular segmentos de tangente a una circunferencia.

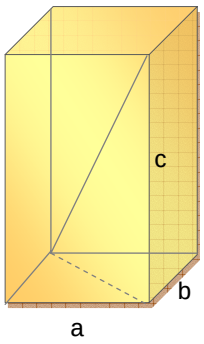






La diagonal de un ortoedro de aristas a, b y c es:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



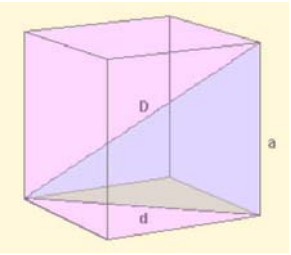
El Teorema de Pitágoras en el espacio

- Calcular la **diagonal de un cubo** de arista **a**

$$D^2 = a^2 + d^2$$

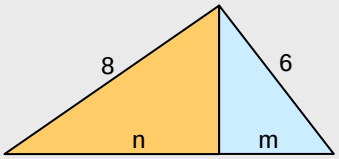
$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$D^2 = 3a^2 \quad y \quad D = a\sqrt{3}$$



EJERCICIOS resueltos

10. En el triángulo rectángulo de la figura se traza la altura sobre la hipotenusa dando lugar a los triángulo naranja y azul. Calcula el valor de **m** y de **n**.



La hipotenusa del triángulo inicial es $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

En el triángulo naranja: $64 = h^2 + n^2$

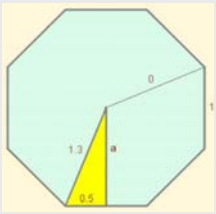
En el triángulo azul: $36 = h^2 + m^2$

restando ambas ecuaciones y como $m + n = 10$, queda:

$28 = n^2 - (10-n)^2$; $28 = n^2 - 100 + 20n - n^2$ $128 = 20n$

n=6,4 **m=3,6**

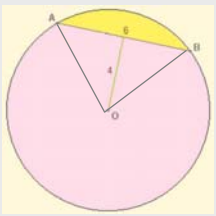
11. Calcula cuanto mide la apotema de un octógono regular de lado 1 dm y radio 1,3 dm.



En el triángulo rectángulo que determinan la apotema, el radio y la mitad del lado:

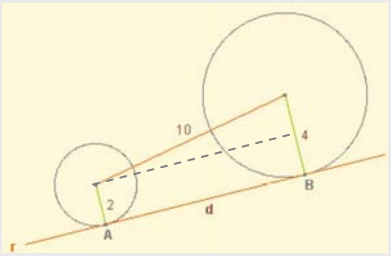
$$a = \sqrt{1{,}3^2 - 0.5^2} = \sqrt{1{,}69 - 0{,}25} = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$$

12. En una circunferencia se sabe la longitud de una cuerda AB, 6 cm, y la distancia de ésta al centro de la circunferencia, 4 cm. ¿Cuánto mide el radio?.



El triángulo AOB es isósceles (OA=OB=radio) y como la distancia del centro a la cuerda se toma sobre la perpendicular, la altura de este triángulo es 4 cm, $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ cm

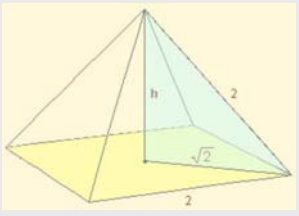
13. La recta r es tangente a las dos circunferencias en los puntos A y B. Halla la distancia que hay entre ambos puntos de tangencia.



Observa el triángulo rectángulo:

$$d = \sqrt{10^2 - (4-2)^2} = \sqrt{96} = 9{,}8$$

14. La pirámide de la figura es regular, su caras son triángulos equiláteros y su base un cuadrado de lado 2 m. Calcula su altura.



La diagonal de la base mide $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

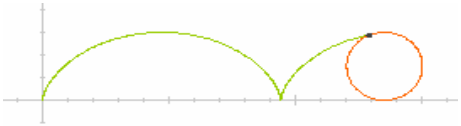
La altura es un cateto del triángulo azul:

$$h = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$$

4. Lugares geométricos

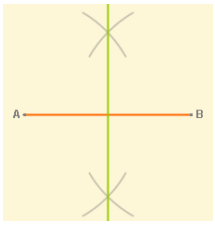
Definición y ejemplos

Un **lugar geométrico** en el plano es un **conjunto de puntos** que cumplen todos ellos una misma propiedad.



Observa la curva que describe un punto P al rodar la circunferencia sobre el eje OX, se llama **cicloide**.

- La **mediatriz** de un segmento

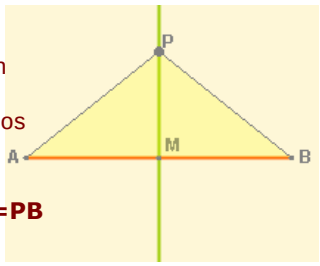


Es la perpendicular por el punto medio del segmento.

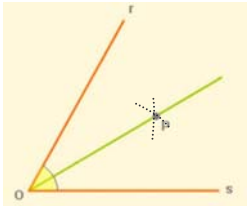
La **mediatriz** de un segmento AB es el lugar geométrico de los puntos del plano que **equidistan** de A y de B.

MA=MB
El ángulo en M es recto.
Los triángulos AMP y BMP son iguales.

PA=PB



- La **bisectriz** de un ángulo

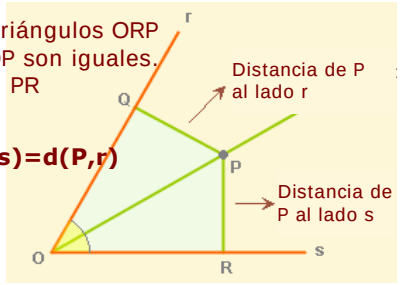


Es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.

La **bisectriz** de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que **equidistan** de los lados de dicho ángulo.

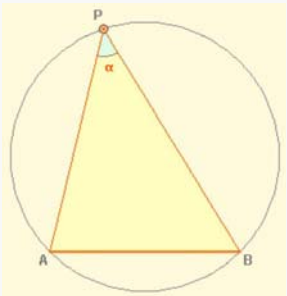
Los triángulos ORP y OQP son iguales.
PQ = PR

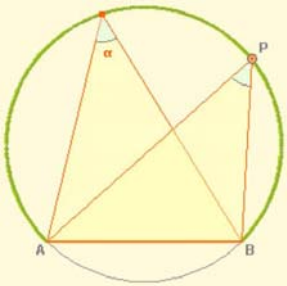
d(P,s)=d(P,r)



Un EJEMPLO interesante

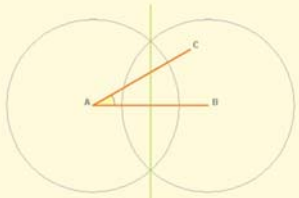
El **arco capaz** de un ángulo α sobre un segmento $\overline{AB}$ es el lugar geométrico de los puntos del plano desde los que se ve el segmento $\overline{AB}$ desde un ángulo α.





construcción

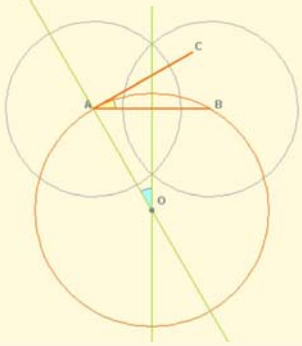
1) Elegido el ángulo, α, se dibuja la mediatriz del segmento AB.



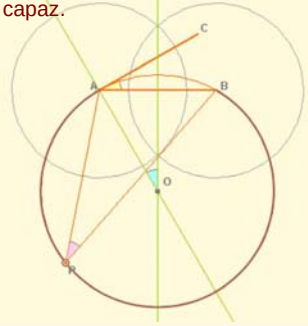
2) Desde A se traza la perpendicular a AC.
El ángulo azul es igual a α.

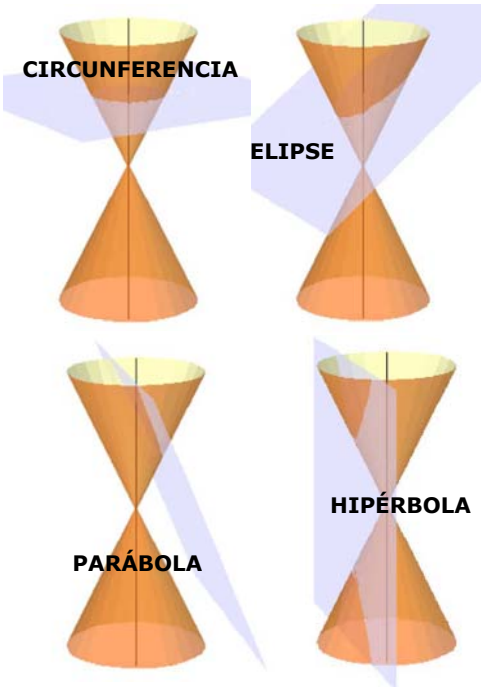


3) Se traza la circunferencia con centro en O y radio OA=OB.



4) El ángulo de vértice P es inscrito y mide la mitad del AOB, es decir α, con lo que tenemos dibujado el arco capaz.





Mas lugares geométricos: las cónicas

Las curvas cónicas, conocidas desde la antigüedad, pueden obtenerse seccionando un cono con un plano.

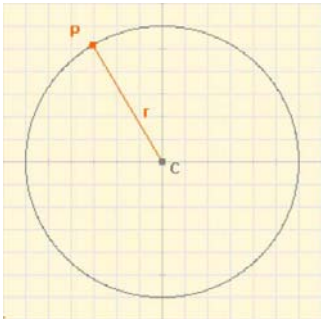
Las curvas cónicas son tres:

- Elipse (contiene a la circunferencia como caso particular)
- Hipérbola
- Parábola

Circunferencia

Lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de uno fijo, el **centro**.

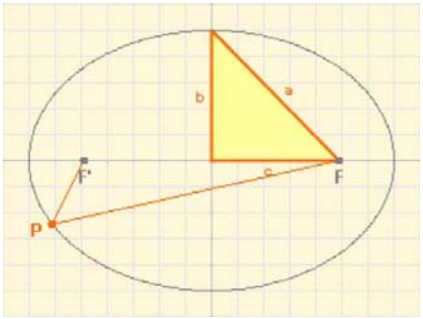
distancia(P,C)=radio



Observa el triángulo rectángulo:

a = semieje mayor
b = semieje menor
2c = distancia focal

$a^2 = b^2 + c^2$



Elipse:

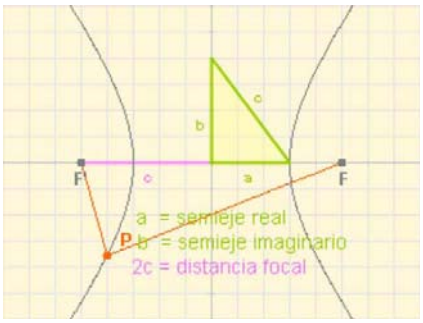
Lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos fijos, los **focos**, es constante

D(P,F)+d(P,F') = 2a

Observa el triángulo rectángulo:

a = semieje "real"
b = semieje "imaginario"
2c = distancia focal

$c^2 = a^2 + b^2$



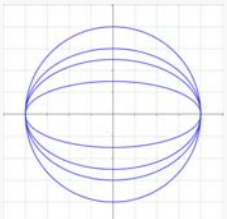
Hipérbola

Lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos fijos, los **focos**, es constante.

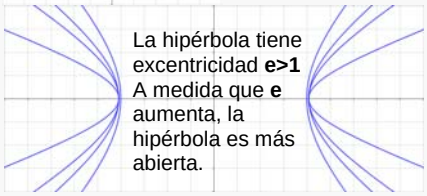
D(P,F) – D(P,F') = 2a

La excentricidad

$e = \frac{c}{a}$



La elipse tiene excentricidad **e<1**
A medida que **e** disminuye, la elipse es menos achatada.
La circunferencia tiene **e=0**



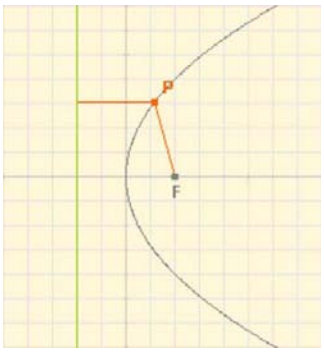
La hipérbola tiene excentricidad **e>1**
A medida que **e** aumenta, la hipérbola es más abierta.

e=0 : circunferencia
e<1 : elipse
e=1 : parábola
e>1 : hipérbola

Parábola

Lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto, el foco, y de una recta llamada directriz.

D(P,F) = D(P,r)

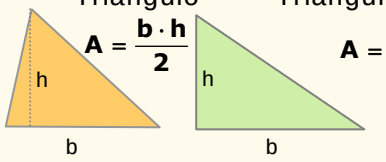


5. Áreas de figuras planas

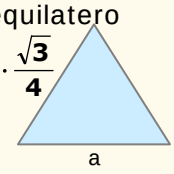
Recuerda las áreas de figuras conocidas

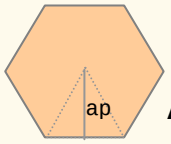
Polígonos

Triángulo $A = \frac{b \cdot h}{2}$



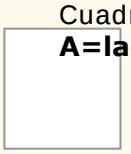
Triángulo equilatero $A = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$



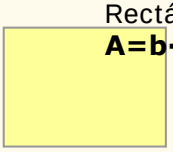


Polígono regular $A = \frac{\text{perímetro} \cdot ap}{2}$

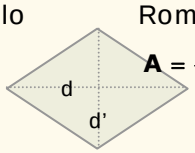
Cuadrado $A = lado^2$



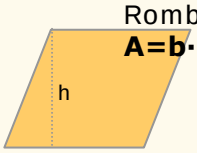
Rectángulo $A = b \cdot a$



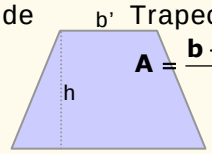
Rombo $A = \frac{d \cdot d'}{2}$



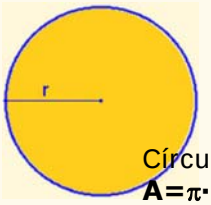
Romboide $A = b \cdot h$



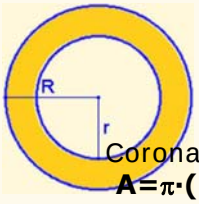
Trapecio $A = \frac{b + b'}{2} \cdot h$



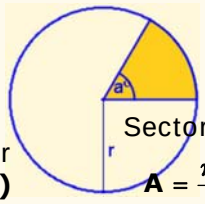
Figuras Curvas



Círculo $A = \pi \cdot r^2$



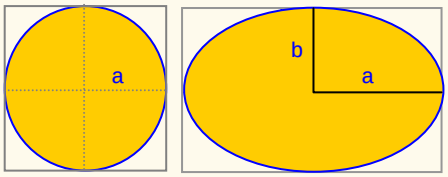
Corona circular $A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$



Sector circular $A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot a}{360}$

La proporción entre el área del círculo y de la elipse es la misma que entre el área de la elipse y del rectángulo:

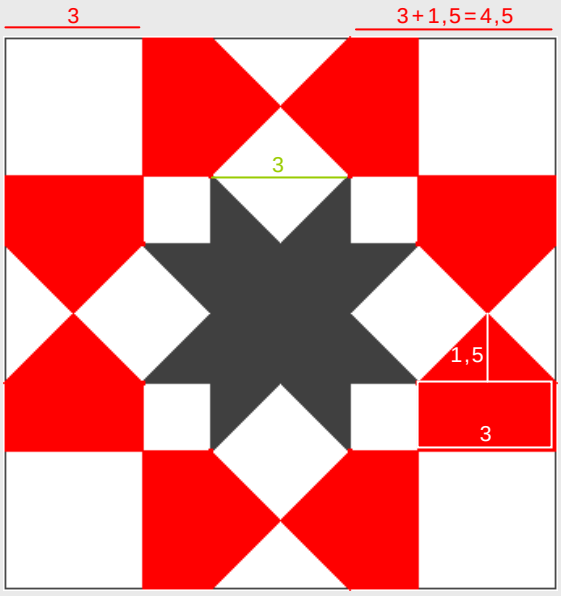
$\frac{A_{CÍRC}}{A_{CUAD}} = \frac{\pi a^2}{4a^2} = \frac{\pi}{4}$ $\frac{A_{ELIPSE}}{A_{RECT}} = \frac{\pi ab}{4ab} = \frac{\pi}{4}$



Recinto elíptico $A = \pi \cdot a \cdot b$

EJERCICIOS resueltos

15. La figura de la derecha está compuesta por áreas de color blanco (cuadrados y triángulos), rojo (pentágonos) y negro. Calcula el área de cada color. Toda la figura es un cuadrado de 12 m de lado.



En el embaldosado del suelo frente a la puerta principal de la catedral de La Seo de Zaragoza

Una de las formas de afrontar el problema:

El área total es $12^2 = 144$ m^2

El área de color rojo es la de 8 pentágonos, cada uno de los cuales está formado por un rectángulo y un triángulo.
Área roja = $8 \cdot (3 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 1{,}5/2) = 54$ m^2

El área de la estrella de color negro es la de dos cuadrados de lado 3 (el central y las 8 puntas que componen otro).
Área negra = $2 \cdot 3^2 = 18$ m^2

El área de color blanco es la de 8 cuadrados de lado 3 m.
Área blanca = $8 \cdot 3^2 = 72$ m^2

Entre las tres suman $54 + 18 + 72 = 144$ m^2

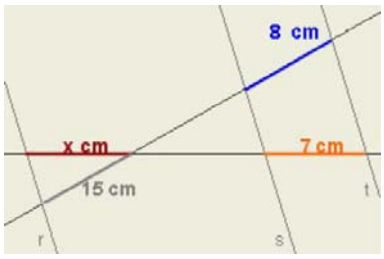
Para practicar

1. Las rectas r, s y t son paralelas, determina el valor de x en cada caso:

a)



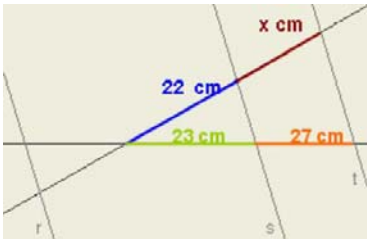
b)



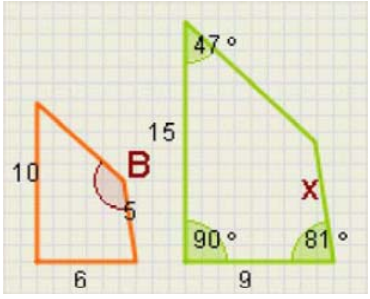
c)



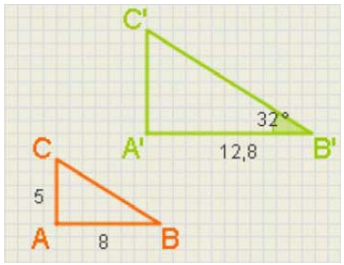
d)



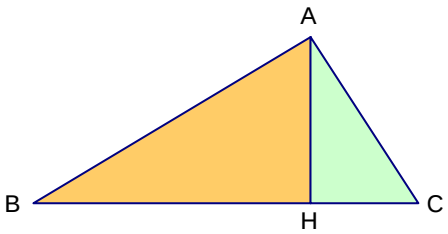
2. Los cuadriláteros de la figura son semejantes. Halla la longitud del lado x y el ángulo B.



3. Los triángulos de la figura son rectángulos y semejantes, calcula los elementos que faltan en cada uno.



4. Comprueba que en un triángulo rectángulo ABC, los triángulos que determina la altura sobre la hipotenusa y el mismo ABC son semejantes. Si los catetos miden 8 cm y 5 cm, calcula la altura.



5. Los lados de un triángulo miden:

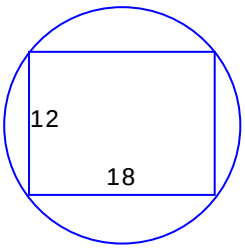
a) 157, 85 y 132

b) 75, 24 y 70

c) 117, 45 y 108

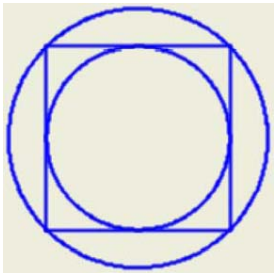
¿Es rectángulo?. En caso afirmativo, ¿cuánto mide la hipotenusa?

6. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia de la figura?.



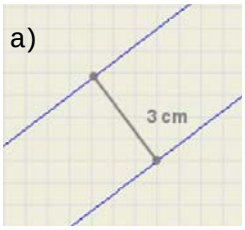
7. En un triángulo isósceles los lados iguales miden 12 cm y el lado desigual 8 cm, ¿cuánto mide la altura?

8. El radio de la circunferencia mayor mide 10 cm, ¿cuánto mide el radio de la menor?

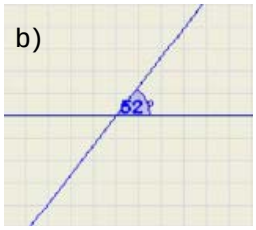


9. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan las rectas de la figura:

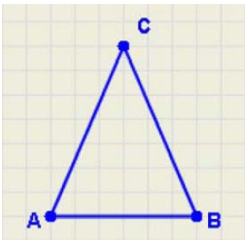
a)



b)



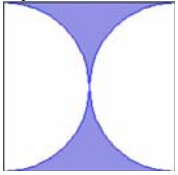
10. El triángulo de la figura es isósceles.Si se desplaza el vértice C de forma que el triángulo siga siendo isósceles, ¿qué lugar geométrico determina C?



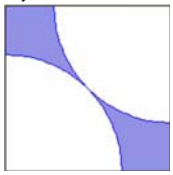
11. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos circunferencias concéntricas, de radios respectivos 8 y 12 cm.

12. Se quiere construir un mural de 3 m de largo por 2,7 m de alto uniendo cuadrados de 30 cm de lado como el de la figura. ¿Qué superficie quedará de color azul?

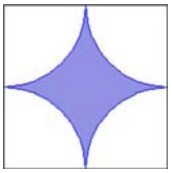
a)



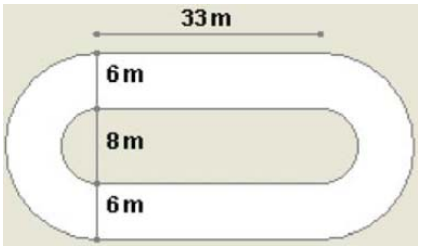
b)



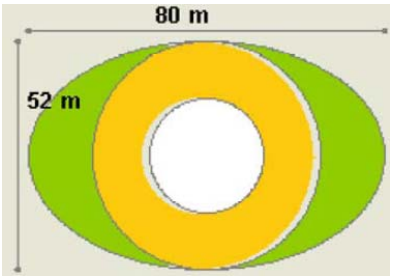
c)



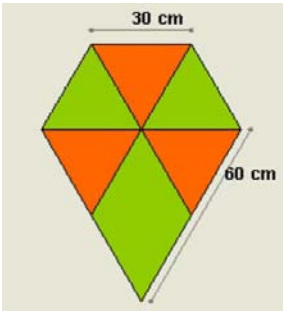
13. Un estadio tiene la forma y dimensiones del dibujo. ¿Qué superficie ocupan las pistas?



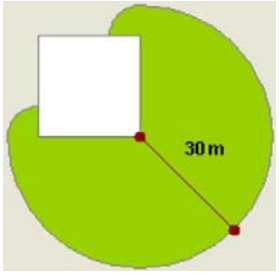
14. Una plaza tiene forma elíptica y las dimensiones de la figura. En el centro hay una fuente circular de 13 m de radio, rodeada de un paseo de tierra y en el resto hay césped. ¿Qué superficie ocupa el césped?, ¿y el paseo?.



15. Para construir una cometa se ha empleado tela de color verde y naranja como en la figura. ¿Qué cantidad de cada color?

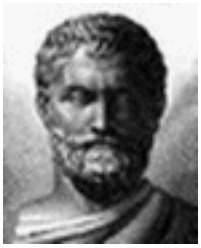


16. Una cabra está atada en la esquina de un corral cuadrado de 20 m de lado, con una cuerda de 30 m de largo, ¿cuál es la superficie sobre la que puede pastar?



Para saber más

Tales y la gran pirámide



Tales de Mileto, que vivió entre los siglos VII y VI antes de nuestra era, está considerado como el primer matemático de la historia. En su juventud viajó a Egipto, donde aprendió algunas de las técnicas geométricas que los egipcios utilizaban, y se propuso calcular la altura de la gran pirámide de Gizeh. Algunos dicen que fue el propio faraón quien se lo pidió. Tales utilizó su famoso teorema, el que has estudiado en esta quincena, pero se encontró con algunas dificultades para la resolución del problema. Veamos cómo lo consiguió:

Tales clavó en la arena una estaca de longitud conocida y cuya sombra en cualquier momento del día podía medir fácilmente. El siguiente paso consistía en medir la sombra que la altura de la pirámide proyectaba.

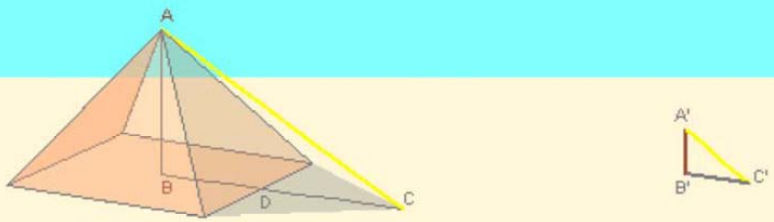


De este modo se podía aplicar su teorema a los dos triángulos semejantes ABC y A´B´C´. Tales podía medir aproximadamente el segmento DC, puesto que es visible, pero no tenía forma de calcular BD, ya que este segmento queda dentro de la pirámide. Pero sabía que la orientación de la pirámide era norte-sur, con lo que esperó a mediodía, cuando el sol está al sur y entonces…



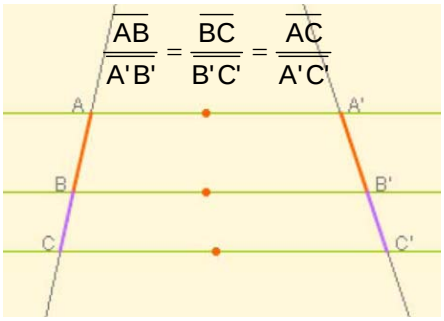
… el segmento BD es justo la mitad del cuadrado de la base de la pirámide, algo que podía calcular perfectamente, y el resto ya era fácil:

$$\frac{AB}{BD+DC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$ de donde no hay más que despejar AB.

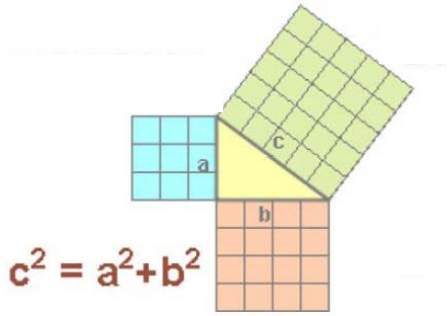


Recuerda lo más importante

Teorema de Tales



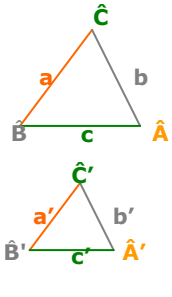
Teorema de Pitágoras



Semejanza

Dos figuras planas son **semejantes** si existe la misma proporción, llamada **razón de semejanza**, entre sus lados homólogos y además sus ángulos homólogos son iguales.

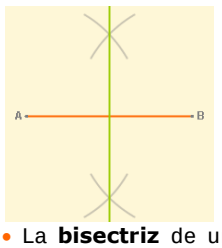
En el caso de los triángulos basta que se cumpla uno de los siguientes criterios:



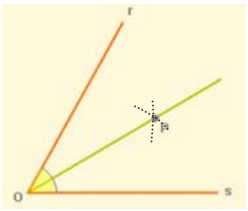
1. Ángulos iguales (con dos basta)
   $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$
2. Un ángulo igual y los lados que lo forman proporcionales
   $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
3. Lados proporcionales
   $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Lugares geométricos

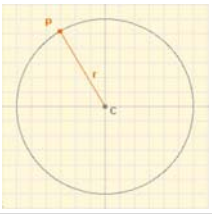
Un **lugar geométrico** en el plano es un **conjunto de puntos** que cumplen todos ellos una misma propiedad.



- La **mediatriz** de un segmento AB es el lugar geométrico de los puntos del plano que **equidistan** de A y de B.

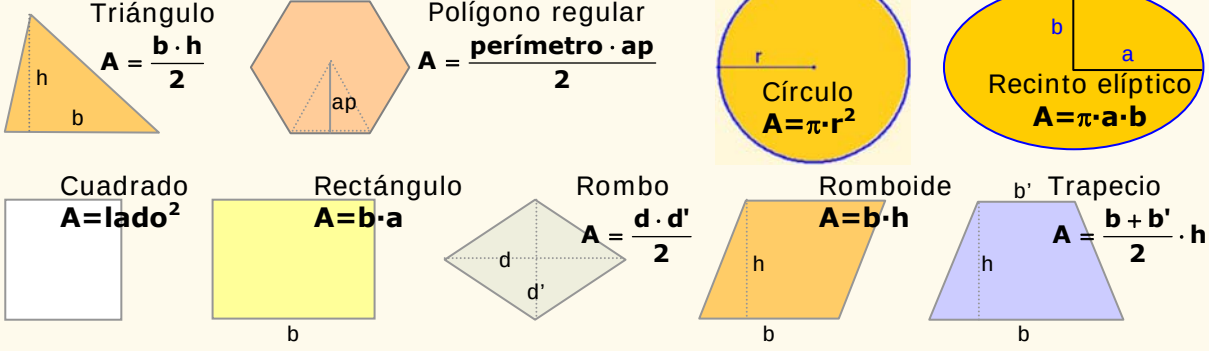


- La **bisectriz** de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de dicho ángulo.

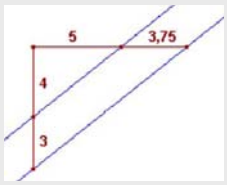


- La **circunferencia**, es el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de uno fijo, el centro.

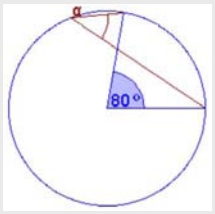
Áreas de recintos planos, se descomponen en áreas de figuras conocidas.



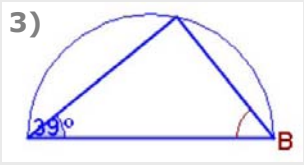
Autoevaluación

1) 

1. ¿Son paralelas las rectas de color azul de la figura?. Utiliza el Teorema de Tales para averiguarlo.

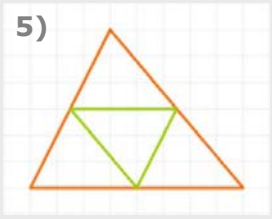
2) 

2. ¿Cuánto mide el ángulo α?

3) 

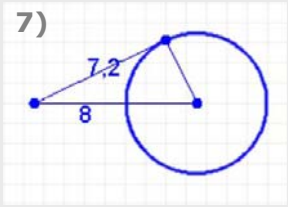
3. ¿Cuánto mide el ángulo B del triángulo de la figura? .

4. Los lados de un rectángulo miden 6 y 3 cm; los de otro miden 9 y 4,5 cm. ¿Son semejantes?.

5) 

5. Los lados del triángulo verde miden 8 cm, 6,7 cm y 7,8 cm; ¿cuánto mide el lado mayor del triángulo naranja?

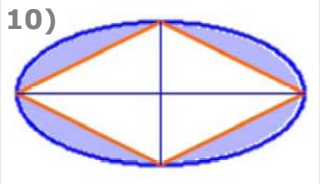
6. Los lados iguales de un triángulo isósceles y rectángulo miden 14 cm, ¿cuánto mide el lado desigual?

7) 

7. Calcula el radio de la circunferencia de la figura.

8. La suma de las distancias de un punto de una elipse a los focos es 10 cm, y el semieje menor mide 3 cm; ¿cuál es la distancia entre los focos?

9. Calcula el área de la figura de color azul, inscrita en una circunferencia de radio 5 cm.

10) 

10. Las diagonales del rombo de la figura miden 8 cm y 4 cm, calcula el área del recinto de color azul.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) 7,5 b) 13,13
   c) 15,05 d) 25,83
2. x=7,5 áng B=142º
3. Ángulos: A=90º, B=32º, C=58º
   a=9,43 b'=8, a'=15,09
4. hipotenusa=9,43; altura h=4,24
5. a) si, hipotenusa=157
   b) no
   c) si, hipotenusa=117
6. La diagonal del rectángulo es el diámetro de la circunferencia, r=10,82
7. h= $\sqrt{128}$ = 11,31 cm
8. r= $\sqrt{50}$ = 7,07 cm
9. a) Otra recta paralela situada entre las dos , a una distancia de 1,5 cm de ambas.
   b) Dos soluciones, las bisectrices de los dos ángulos que forman las rectas.
10. La mediatriz del lado AB
11. Otra circunferencia concéntrica de radio 10 cm.
12. Se necesitan 90 cuadrados
    En cada caso el área azul es:
    90·193,5=17415 cm^2 = 1,7415 m^2
13. Dos rectángulos y una corona circular:
    2·198 + 263,76 = 659,76 m^2
14. Césped, recinto elíptico menos círculo:
    1142,96 m^2
    Paseo, corona circular: 1591,98 m^2
15. Se puede descomponer en triángulos equiláteros.
    4 de tela verde: 3117,68 cm^2
    3 de tela naranja: 2338,26 cm^2
16. Área: ¾ partes de un círculo de radio 30 m más ½ círculo de radio 10 m
    2276,5 m^2

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. Si
2. 40º
3. 90º-39º = 51º
4. Sí
5. 16 cm
6. 14· $\sqrt{2}$ =19,8 cm
7. 3,49 cm
8. 8 cm
9. 32,48 cm^2
10. 9,18 cm^2

No olvides enviar las actividades al tutor ▶