12

Estatística e Probabilidade

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Recoller datos para un estudo estatístico.
- Organizar os datos en táboas de frecuencia absoluta e relativa.
- Construír e interpretar diversos gráficos estatísticos. Diagramas de barras, líneas poligonais, diagramas de sectores.
- Distinguir sucesos dun experimento aleatorio. Coñecer e utilizar as identidades notables.
- Calcular probabilidades sinxelas.

Antes de empezar

1.Distribucións estatísticas.
Táboas de frecuencias ..... páx. 198
Variable, poboación e mostra
Frecuencia absoluta e relativa
Porcentaxes e ángulos

2.Gráficos estatísticos ..... páx. 200
Diagrama de barras
Diagrama de sectores
Pictogramas

3.Experimentos aleatorios ..... páx. 203
Sucesos. Espazo mostral
Diagramas de árbore
Unión de sucesos
Intersección de sucesos

4.Probabilidade ..... páx. 205
Noción de probabilidade
Regra de Laplace

Exercicios para practicar

Para saber máis

Resumo

Autoavaliación

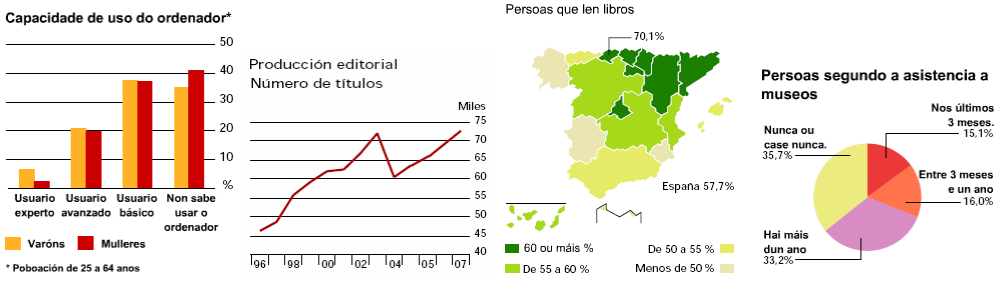
Actividades para enviar ao titor

Antes de empezar



Gráficos estatísticos

Moitas veces viches gráficos similares aos seguintes, sacados do INE, Instituto Nacional de Estatística. Nesta quincena aprenderás a interpretalos.



1. Distribucións estatísticas. Táboas de frecuencia.

Variable, poboación e mostra

Se queremos saber canto **camiñan diariamente os alumnos dun instituto**, preguntarémoslles a todos (mostra exhaustiva) ou algúns escollidos por cursos (mostra estratificada) ou elixidos ao chou (mostra aleatoria). **A poboación** son todos os alumnos do instituto, **a mostra** está formada polos alumnos enquisados e **a variable** é a distancia que camiña cada alumno diariamente, que como se pode cuantificar diremos que é unha variable cuantitativa.
Cando se pretende saber **cal é o programa de TV favorito entre os membros dunha familia**, a poboación é esa familia e a **variable é cualitativa**, pois non se expresa cunha cantidade numérica.

a) Preguntamos aos alumnos dun instituto canto camiñan diariamente.



b) Cal é o programa favorito da familia de Antonio?



Frecuencia absoluta e relativa



	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Tanto por un ou probabilidade
Vermello	4	4/25	0,16
Verde	4	4/25	0,16
Azul	4	4/25	0,16
Amarelo	5	5/25	0,2
Negro	8	8/25	0,32

Na imaxe da esquerda aparecen os datos recollidos nunha enquisa, o reconto exprésase nas casas da primeira columna, a frecuencia absoluta dun valor ou tramo da variable é o número de veces que aparece ese valor nos datos recollidos. A continuación escríbese cada f. absoluta entre o número total de datos ou tamaño da mostra,N

$$\text{f. relativa} = \frac{\text{f. absoluta}}{\text{nº de datos}}$$

Porcentaxes e ángulos



	Frecuencia relativa, 4 decimais	Porcentaxe % tanto por 100	Ángulo en graos
36	0,1	10	36
37	0,25	25	90
38	0,25	25	90
39	0,3	30	108
40	0,1	10	36

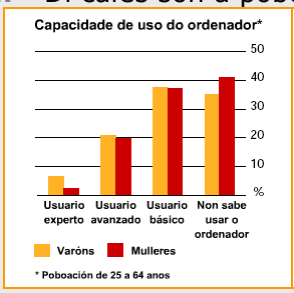
Se un valor aparece 6 veces nos 20 datos, a súa frecuencia relativa é 6/20 =0,3 que é igual a 30/100 ou 30% (fraccións equivalentes por 5), 30 é a porcentaxe dese valor. Do mesmo xeito se consideramos que o total de datos representa os 360º graos da circunferencia, cantos graos corresponderán a ese valor?
0,3.360 graos =108 graos

$$\% = \text{f. relativa} \cdot 100$$
$$\text{Graos} = \text{f. relativa} \cdot 360$$

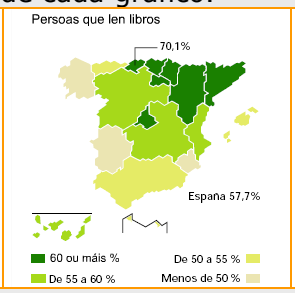
Observa que a suma total da primeira columna é 1, o total das porcentaxes é 100 e o total da terceira columna da escena é 360.

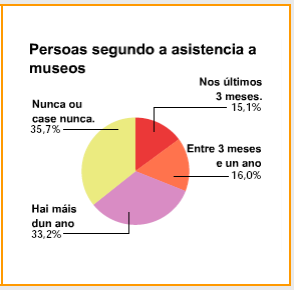
EXERCICIOS resoltos

1. Di cales son a poboación e as variables de cada gráfico.









Solucións

A poboación son os varóns e mulleres de 25 a 64 anos. A variable é a experiencia co ordenador.	A poboación son os libros editados dende 1996 a 2007. A variable é o ano de edición.	Poderíase dicir que a poboación, todos os españois, distribúese por autonomías e dentro de cada autonomía estudouse a variable "Lense libros?"	A poboación son os españois. A variable o tempo transcorrido dende a súa última visita a algún museo.

2. Completa cada unha das seguintes táboas

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa ou prob.
Vermello	10	
Verde	9	
Azul	6	
Total N		

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa ou prob.
[150, 160)		0,35
[160, 170)		0,4
[170, 180)		
Total N	20	

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa ou prob.
36	8	
37	6	
38	11	
Total N		

Solucións

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa ou prob.
Vermello	10	0,4
Verde	9	0,36
Azul	6	0,24
Total N	25	

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa ou prob.
[150, 160)	7	0,35
[160, 170)	8	0,4
[170, 180)	5	0,25
Total N	20	

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa ou prob.
36	8	0,32
37	6	0,24
38	11	0,44
Total N	25	

3. Completa as seguintes táboas de porcentaxes e graos.

	Frecuencia absoluta	%	Ángulos en graos
Vermello	7		
Verde	18		
Azul	15		
Total N			

	Frecuencia absoluta	%	Ángulos en graos
[150, 160)		50	
[160, 170)		30	
[170, 180)			
Total N	10		

	Frecuencia absoluta	%	Ángulos en graos
[150, 160)			72
[160, 170)			108
[170, 180)			
Total N	40		

Solucións

	Frecuencia absoluta	%	Ángulos en graos
Vermello	7	17,5	63
Verde	18	45	162
Azul	15	37,5	135
Total N	40		

	Frecuencia absoluta	%	Ángulos en graos
[150, 160)	5	50	180
[160, 170)	3	30	108
[170, 180)	2	20	72
Total N	10		

	Frecuencia absoluta	%	Ángulos en graos
[150, 160)	8	20	72
[160, 170)	12	30	108
[170, 180)	20	50	180
Total N	40		

2. Gráficos estatísticos

Diagrama de barras

Fíxate atentamente no cadro da dereita, ao facer o reconto das estaturas obtense o diagrama de barras. A altura de cada barra é a frecuencia absoluta do dato que representa.

O gráfico indica doadamente a primeiro golpe de vista cal é o tramo de altura que máis se dá entre os 30 alumnos.

A altura de cada barra tamén se podería ter definido coas frecuencias relativas ou coas porcentaxes, o gráfico sería similar.

Outro gráfico que se ve a miúdo é a liña que une os centros da parte superior das columnas ou liña poligonal.

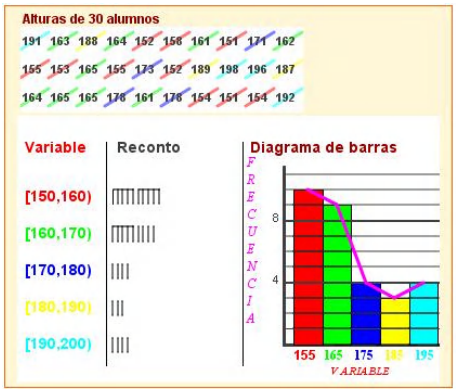


Diagrama de sectores

Moitas veces terás visto un gráfico como o da dereita, gráfico de sectores, o ángulo central que ocupa un sector mídese en graos,

> 360·frecuencia/nº de datos

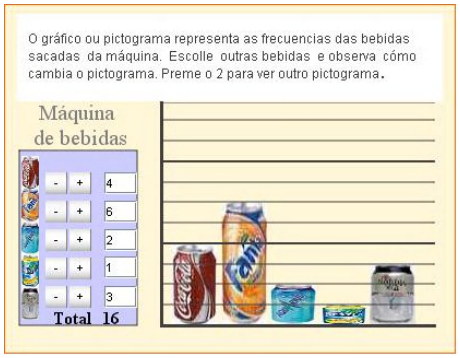
As áreas dos sectores son directamente proporcionais ás frecuencias do valor da variable que representan.



Pictogramas

A escena presenta un pictograma sobre as bebidas escollidas nunha máquina.

Un pictograma é un tipo de gráfico, que en lugar de barras, utiliza unha figura proporcional á frecuencia. Xeralmente emprégase para representar variables cualitativas.



EXERCICIOS resoltos

4. Acha o diagrama de barras dos datos:

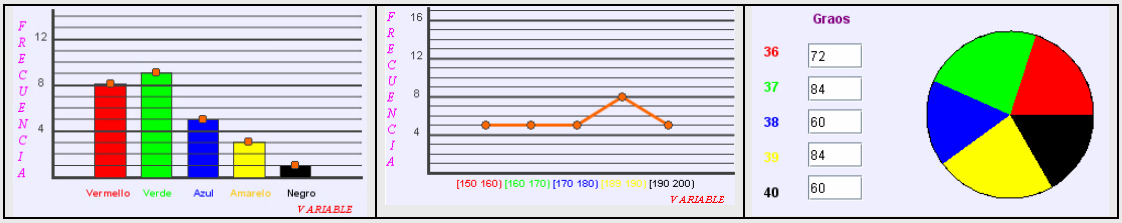


Agrupa as estaturas en intervalos de lonxitude 10 cm, dende 150 a 200. Debuxa a liña poligonal.

Debuxa o diagrama de sectores dos seguintes datos obtidos ao preguntar sobre o número de calzado nunha enquisa.



Solucións



5. Observa o gráfico de barras e responde ás preguntas:



1. As porcentaxes de nacementos de nai estranxeira, aumenta ou diminúe co paso dos anos?
2. Cal é a porcentaxe de nacementos de nai española no 2002? E de nai estranxeira ese mesmo ano?

Solucións

1. A porcentaxe de nacementos de nai estranxeira é cada vez maior.
2. No 2002 o 90% dos nacementos foron de nai española e o 10% de nai estranxeira,

6. Mira con atención este pictograma



Escribe no teu caderno un resumo dos datos que aporta este pictograma

Solución

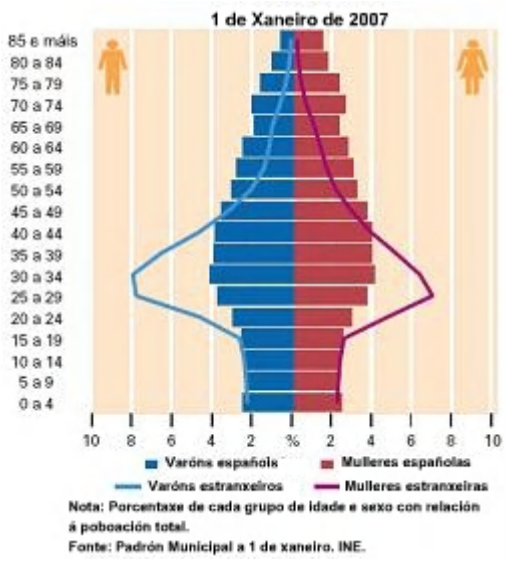
O pictograma indícanos que cada vez é maior a recollida de envases de vidro para reciclar.

No 2001 recolléronse cerca de 500 Tm e no 2005 unha 700 Tm.

Este non é un diagrama con moita precisión

EXERCICIOS resoltos

7. Responde ás preguntas sobre esta pirámide de poboación:

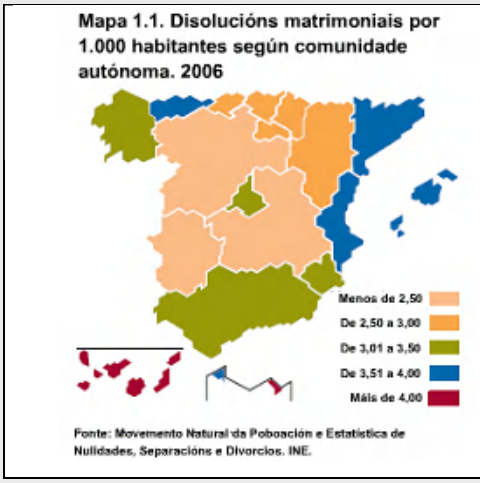


3. Que tramo de idade ten máis varóns estranxeiros? E mulleres estranxeiras?
4. Os varóns e mulleres españolas son case iguais en cada intervalo ata certa idade. A partir de que idade hai máis mulleres que varóns españois?

Solucións

1. O tramo con máis varóns estranxeiros é de 30 a 34 anos. O intervalo con máis mulleres estranxeiras é de 25 a 29.
2. A partir dos 45 anos xa se aprecia un aumento do número de mulleres sobre o de homes españois, este aumento é bastante significativo a partir dos 75 anos.

8. Desenvolve as seguintes expresións

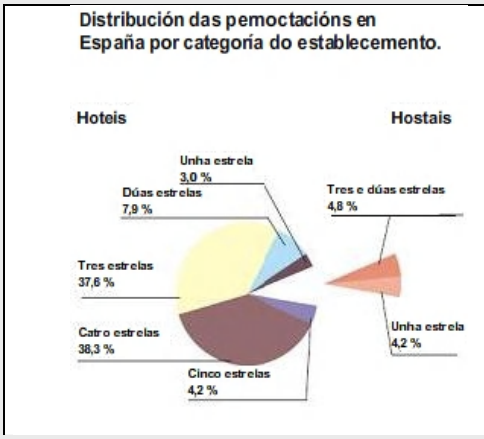


1. Cantos matrimonios houbo no ano 2006?
2. Cal foi o número de disolucións nese mesmo ano?

Solucións

1. No 2006 houbo aproximadamente 200 mil matrimonios
2. No ano 2006 houbo unhas 150 mil disolucións

9. Acha a expresión en coeficientes dos seguintes produtos

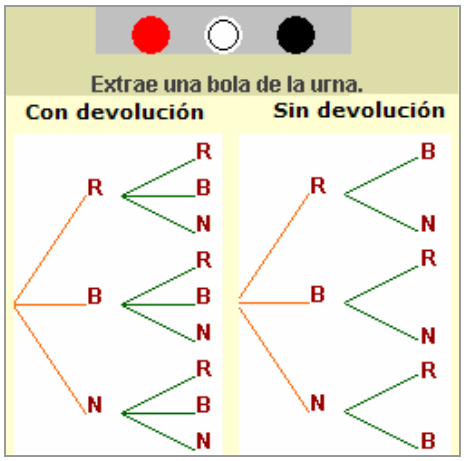


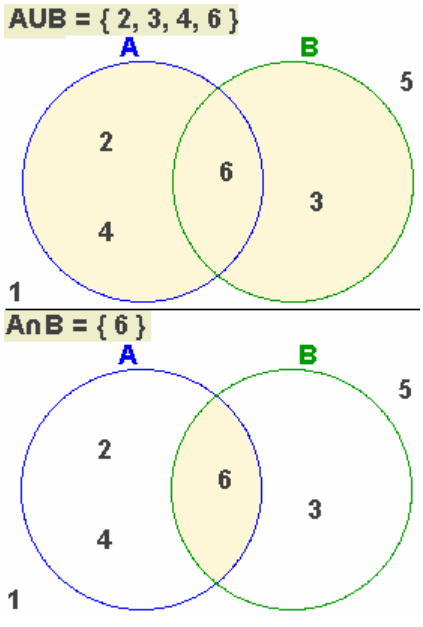
1. En que tipo de establecemento houbo máis pernoctacións?
2. Cal foi a porcentaxe de pernoctacións en hostais?

Solucións

1. O tipo de establecemento con máis pernoctacións foi o de 4 estrelas.
2. Un 9% das pernoctacións foron en hostais







3. Experimentos aleatorios

Sucesos. Espazo mostral

Ao extraer unha carta dunha baralla, lanzar unha moeda, tirar un dado, e noutros exemplos análogos, non podemos saber de antemán o resultado que se vai obter. Son experimentos **aleatorios**, aqueles nos que non se pode predicir o resultado e deles se trata aquí.

O conxunto de todos os posibles resultados dun experimento aleatorio chámase **espazo mostral**, e cada un deses posibles resultados é un **suceso elemental**.

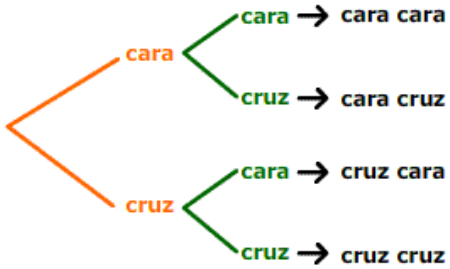
- Un **suceso** é calquera subconxunto do espazo mostral, verifícase cando acontece calquera dos sucesos elementais que o forman.

Hai un suceso que se verifica sempre, o **suceso seguro** que é o mesmo espazo mostral.

Diagramas de árbore

Se lanzamos un dado dúas veces cal será o espazo mostral? E se se extraen bólas dunha urna? Nestes casos os diagramas de árbore axúdannos a determinar os sucesos elementais.

No exemplo calculamos os sucesos elementais que resultan ao lanzar dúas veces unha moeda.



Catro sucesos elementais,
E={cara cara, cara cruz, cruz cara, cruz cruz}

Unión e Intersección de sucesos

A unión de sucesos equivale á disxunción "ou", é dicir, se A é o suceso "sacar par" ao tirar o dado e B é o suceso "sacar un múltiplo de 3",

A={2, 4, 6} B={3, 6}

o suceso unión, AUB, verifícase cando ocorre A ou B

AUB={2, 3, 4, 6}

A intersección equivale á conxunción "e"

A ∩B={6}

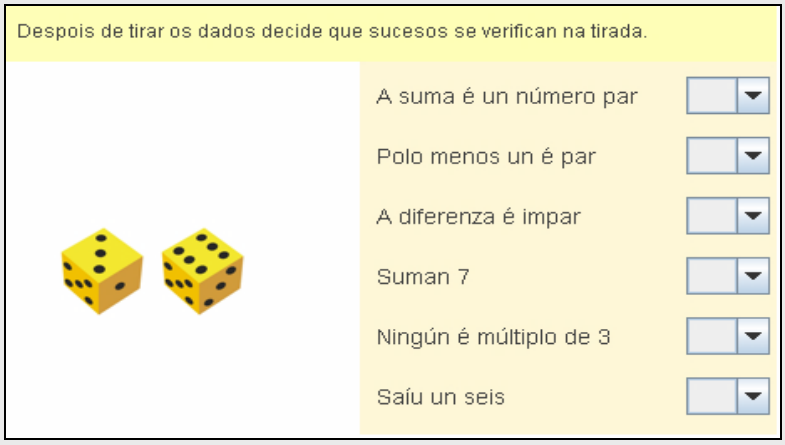
AUB significa A "ou" B

A ∩B significa A "e" B

Observa que neste exemplo A ten 3 elementos; B, 2 ; A ∩B, un e AUB consta de 4 elementos.

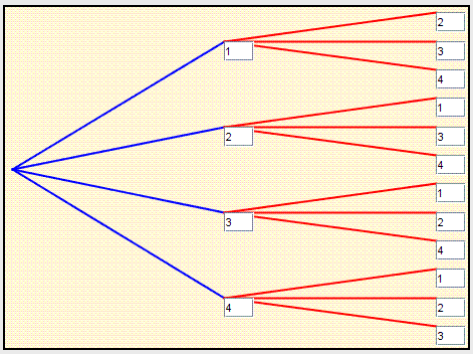
EXERCICIOS resoltos

10. Decide cun si ou un non se se verifican os sucesos indicados

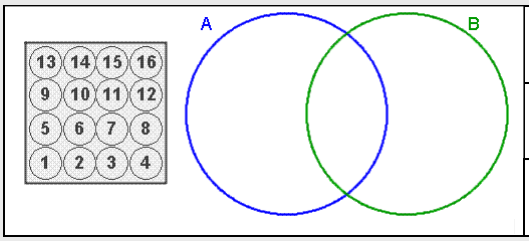


Solución: Non, Si, Si, Non, Si, Non.

11. Constrúe unha árbore para determinar o espazo mostral da extracción, sen devolución, de dúas bólas dunha urna que contén catro.

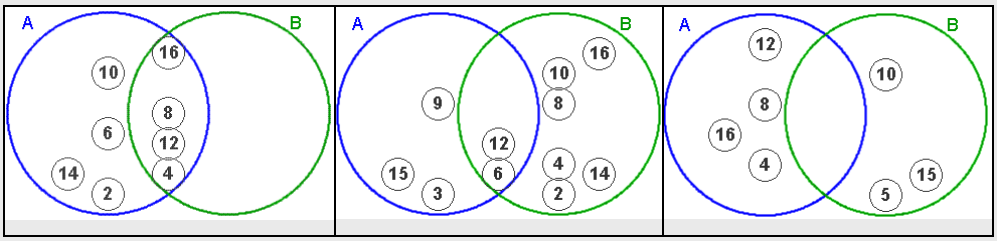


12. Constrúe os diagramas de Venn en cada caso.



1. A = múltiplos de 2
   B = múltiplos de 4
2. A = múltiplos de 3
   B = múltiplos de 2
3. A = múltiplos de 4
   B = múltiplos de 5

Solucións



4. Probabilidade

Noción de probabilidade

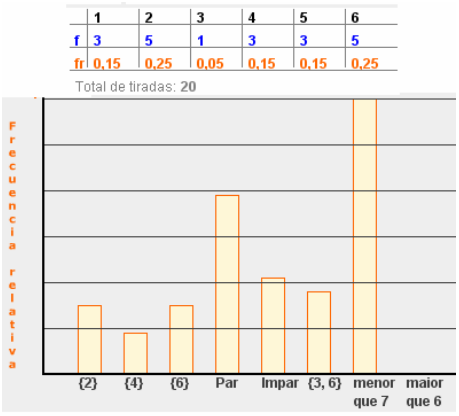
Dise que un suceso A é máis probable que outro B se ao realizar o experimento moitas veces, A acontece significativamente máis veces que B.

A secuencia de imaxes móstranos a frecuencia relativa dalgúns sucesos ao tirar o dado 20, 1020 ou 100000 veces.

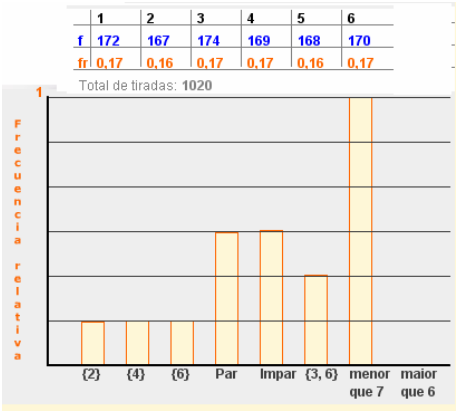
Os posibles sucesos elementais ao tirar o dado teñen practicamente igual frecuencia relativa cando realizamos máis de 100000 tiradas. As frecuencias relativas non varían significativamente ao aumentar o número de tiradas despois de realizar un gran número delas.

Estarías de acordo, á vista dos resultados, en dicir que a probabilidade de sacar un 2 é 1/6?

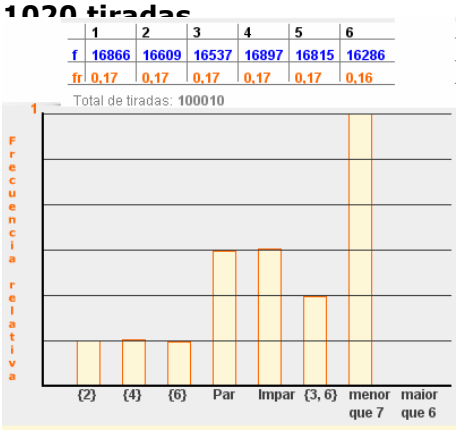
A probabilidade mídese entre 0 (probabilidade do suceso imposible) e 1 ou 100% (probabilidade do suceso seguro).



20 tiradas



1020 tiradas



100000 tiradas

A regra de Laplace

Cando nun experimento aleatorio todos os sucesos elementais teñen a mesma probabilidade, é dicir, son **equiprobables**, para calcular a probabilidade dun suceso calquera A, abonda contar e facer o cociente entre o n.º de sucesos elementais que compoñen A (**casos favorables**) e o nº de sucesos elementais do espazo mostral (**casos posibles**).

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Este resultado coñécese como regra de Laplace. Recorda que para poder aplicala é necesario que todos os casos posibles sexan igualmente probables.







EXERCICIOS resoltos

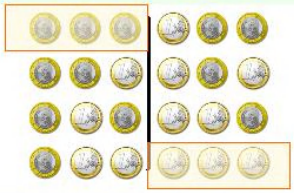
13.

		Solución
Experimento: Tirar unha vez o dado. **Arrastra cada suceso á franxa correcta**	Imposible	Imposible Múltiplo de 7
Múltiplo de 4 — Par ou menor que 4	Moi pouco probable	Moi pouco probable Múltiplo de 4 — Múltiplo de 5
{1, 4} — Par ou Impar	Pouco probable Probable ao 50%	Pouco probable {1, 4} Probable ao 50% Impar
Impar — Múltiplo de 7	Bastante probable Moi probable	Bastante probable Maior que 2 Moi probable Par ou menor que 4
Maior que 2 — Múltiplo de 5	Seguro	Seguro Par ou Impar

14. Dados

Acha a probabilidade de sacar un un ao tirar un dado.	Acha a probabilidade de sacar polo menos un un ao tirar dous dados.
Na imaxe vemos que o nº de **casos posibles é 6**	Na imaxe vemos que o nº de **casos posibles é 36**
	
Nº de casos favorables: 1	Nº de casos favorables: 11
Probabilidade do suceso: 1/6	Probabilidade do suceso: 11/36

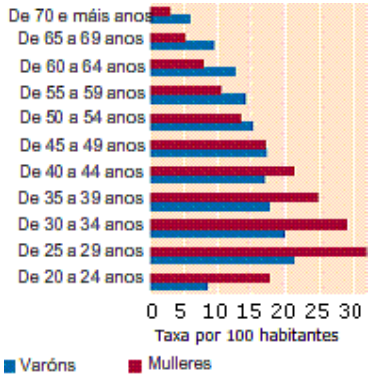
15. Moedas

Probabilidade de sacar polo menos unha cara ao tirar dúas moedas.	Probabilidade de sacar polo menos dúas caras ao tirar tres moedas.
Na imaxe vemos que o nº de **casos posibles é 4**	Na imaxe vemos que o nº de **casos posibles é 8**
	
Nº de casos favorables: 2	Nº de casos favorables: 2
Probabilidade do suceso: 2/4	Probabilidade do suceso: 2/8

Para practicar

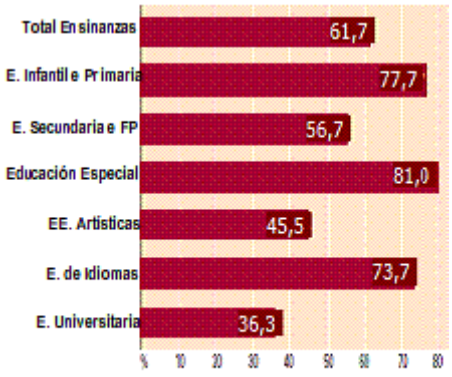
1. Describe a poboación e variable ou variables de cada gráfico. Di de que tipo son as variables, cuantitativas ou cualitativas?

a) Poboación de 20 e máis anos con Estudos Universitarios. Ano 2007



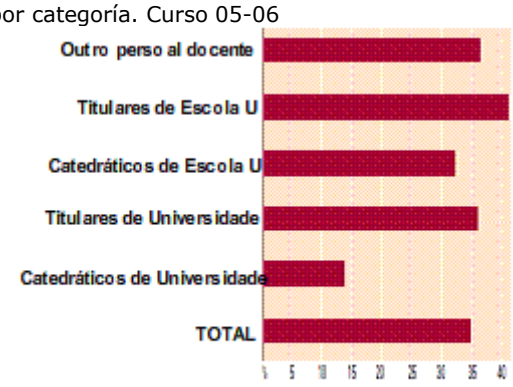
Fonte: Enquisa de Poboación Activa. INE.

b) % de mulleres no profesorado por ensinanza que imparten. Curso 05-06



Fonte: "Las Cifras de la Educación en España". Avance Edición 2008. MEC.

c) % de mulleres no profesorado universitario por categoría. Curso 05-06



Fonte : Estatística da Ensinanza Universitaria en España. INE.

2. Fai un reconto dos datos (número de irmáns) nunha táboa:

1 3 3 1 0 2 2 4 3 2 1 4 2 1 0

3. Fai un diagrama de sectores para os datos da cor preferida que indica a táboa.

x	Verm	Ve.	Azul	Am.	Tur	Total
f	2	1	3	4	5	15

4. Debuxa un diagrama de barras para os datos da seguinte táboa.

x	Verm	Ve.	Azul	Am.	Tur	Total
f	3	3	5	4	5	20

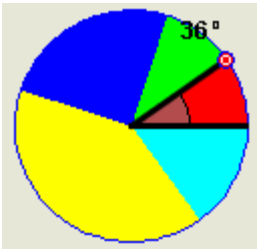
5. Completa a táboa coas porcentaxes

x	Verm	Ve.	Azul	Am.	Tur	Total
f	3	4	2	3	8	20
%						

6. Completa a táboa sabendo que a porcentaxe do "vermello" é o 15%.

x	Verm	Ve.	Azul	Am.	Tur	Total
f	3	2	5	7		

7. Cal é a % que corresponde ao valor da variable representado polo sector vermello?



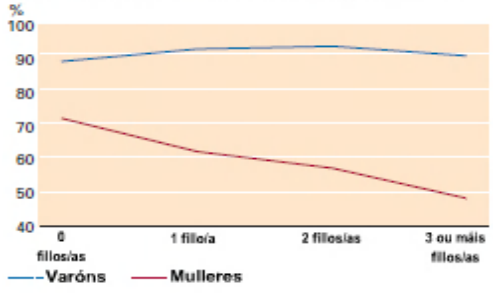
8. Cales son as comunidades con maior densidade de disolucións matrimoniais por número de habitantes? O número de habitantes de Murcia no 2006 é de 1370306, calcula o n.º de disolucións en Murcia nese ano.



Fonte: Movemento Natural da Poboación e Estatística de Nulidades, Separacións e Divorcios. INE.

9. Cal é a % de homes con 3 ou máis fillos que ten traballo? Calcula esa % no caso das mulleres. Inflúe o n.º de fillos na taxas de ocupación dos varóns? E nas mulleres?

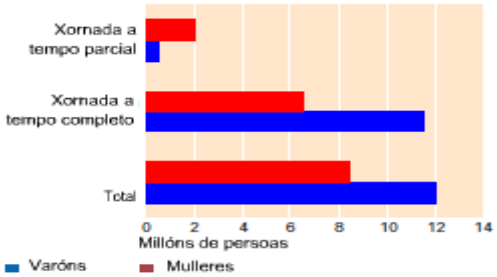
Gráfico 3.10. Taxa de ocupación en función do número de fillos/as. 2006



Fonte: Enquisa de Poboación Activa (EPA). INE.

10. Cal é o total da poboación ocupada no cuarto trimestre do ano 2007? Cantas persoas traballaban nese período a tempo parcial?

Gráfico 3.7. Poboación ocupada por xornada laboral e sexo. 2007



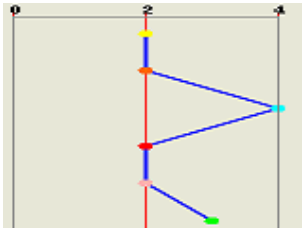
Nota: Datos referidos ao 4º trimestre.

Fonte: Enquisa de Poboación Activa. INE.

11. O n.º de caramelos de cada cor que hai nunha bolsa móstrase no gráfico Cal é a probabilidade de extraer un caramelo vermello?



12. Cal é a probabilidade, segundo o gráfico, de sacar un dado verde da bolsa?

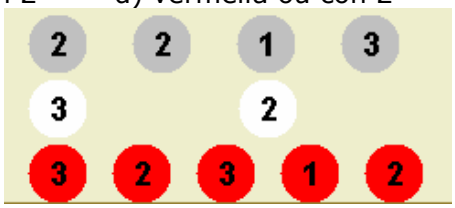


13. A={1, 5, 7, 8, 9} B={3, 4, 5, 8, 9} Calcula AUB e $A \cap B$

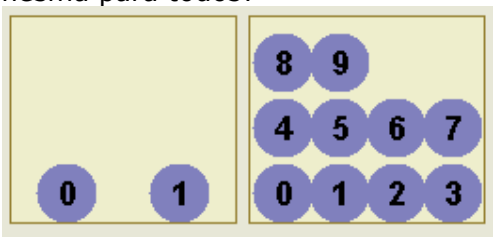
14. Dunha urna con catro bólas extráense sucesivamente e con devolución dúas bólas. Debuxa o diagrama de árbore e dei cal é o número de sucesos elementais. Cal é o número de sucesos elementais se a extracción é sen devolución?

15. Acha a probabilidade de que ao extraer unha bóla da urna do gráfico sexa

a) unha bóla b) un 2 c) vermella e con 2 d) vermella ou con 2



16. Entre 12 amigos vaise sortear un premio, para iso repártense números do 0 ao 11 e extráese un número, a decena, da urna esquerda e segundo a decena extraída, iremos á urna dta. ou esq. para extraer as unidades. A probabilidade de ser premiados é a mesma para todos?



Será o sorteo xusto se se procede do mesmo xeito con 20 amigos e se reparten números do 0 ao 19?

17. No lanzamento dun penalti considéranse os posibles sucesos: "gol" ou "non marcar". A probabilidade de gol é ½?

18. Ao comezo do partido cunha moeda decídese cal será a portaría de cada equipo. A probabilidade de que ao equipo A lle toque a portaría sur é ½?

19. Achar a probabilidade de que ao tirar tres dados a suma total sexa 4. Cal é a probabilidade de sumar 5?

Para saber máis

Estatística Descritiva, Estatística Inferencial

Pierre-Simon Laplace 1749 – 1827



Observa esta imaxe, é equivalente a tomar unha mostra dunha poboación. En principio só tes na túa mente un conxunto de datos, que non che din nada. Non obstante, se te afastas uns 3 metros e observas de novo a imaxe, empezarás a extraer algo máis de información, e posiblemente intúas mellor o que representa esta imaxe. Terás feito unha inferencia dos datos mostrais, para ter unha imaxe do conxunto. Este é o obxecto das técnicas da **estatística** que a clasifican en estatística **descritiva** e **inferencial**: Obter mostras e inferir datos sobre a poboación

Imaxe orixinal





Control de calidade

Que é a calidade? Evitar colas, ofrecer bos produtos... o control de calidade é unha parte da estatística.

Foi en Norteamérica, nos anos 20, onde xurdiron os pioneiros da aplicación de métodos estatísticos para a mellora dos procesos de produción.
Que é a calidade?
Poñamos algúns exemplos :

- A ninguén lle gusta que se compra un paquete de 1 Kg dun produto, este poida pesar 950 gr .
- Non nos di nada que o tempo medio en que unha compañía de mensaxeiros entrega un paquete nunha cidade sexa de 40 minutos, se o noso nos chega ao cabo de 4 horas .
- Nas oficinas bancarias, suprimiron as filas múltiples diante das xanelas, pola fila única. Acaso se fixo por reducir o tempo medio de espera dos clientes? Non, o tempo medio non varía, pero desta forma trátase de eliminar a variabilidade nos tempos de espera.

A homoxeneidade dos resultados é normalmente a clave para a calidade. A estatística mide e estuda a dispersión dos resultados para procurar esta homoxeneidade .

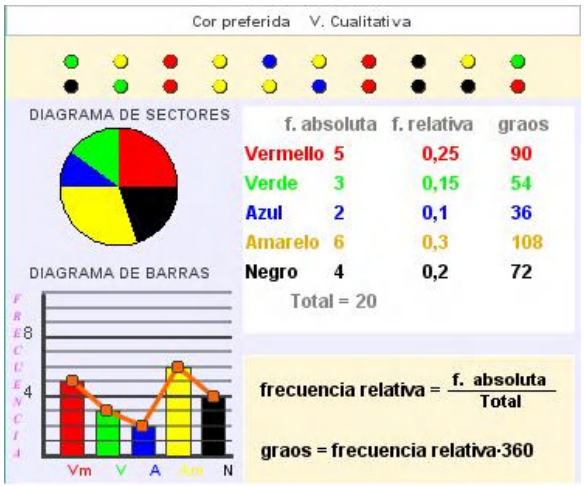
Extracto da páxina http://www.isftic.mepsed.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2001/estadistica/index2.htm

Antes de Laplace o libro de Cardano



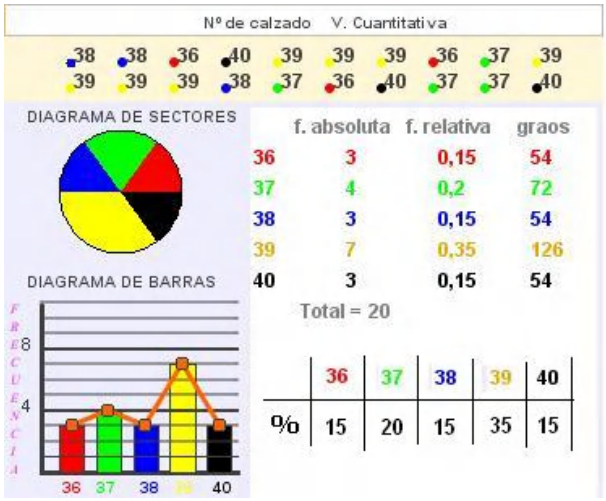
Á morte de Gerolamo Cardano (1501-1576) encontrouse, entre os seus manuscritos, *o Liber de Ludo Alae* (Libro dos xogos de azar) a primeira obra dedicada integramente á probabilidade. Foi publicada en 1663. Nesta obra Cardano presenta unha primeira aproximación ao concepto de probabilidade en termos de proporcións.

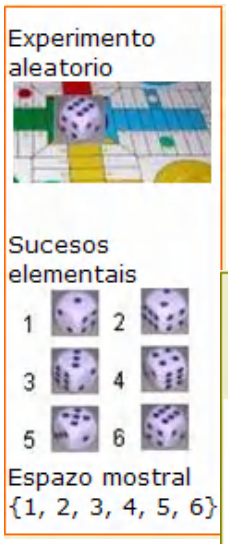
Lembra o máis importante



Estatística

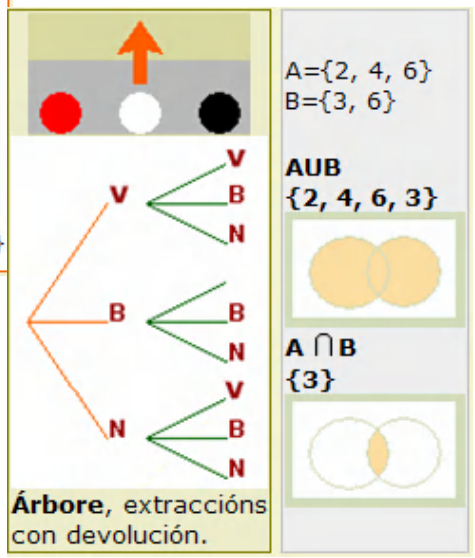
Debes saber realizar o reconto en variables cualitativas e cuantitativas, calcular a táboa de frecuencias e graos e construír os diagramas de sectores, barras ou a liña poligonal.





Probabilidade

Calcular os casos posibles é achar o espazo mostral, en algúns casos constrúese con axuda dunha árbore.
A probabilidade de que se dea o suceso A ou B é a da unión ou AUB; a de que se dean A e B é a da intersección ou $A \cap B$



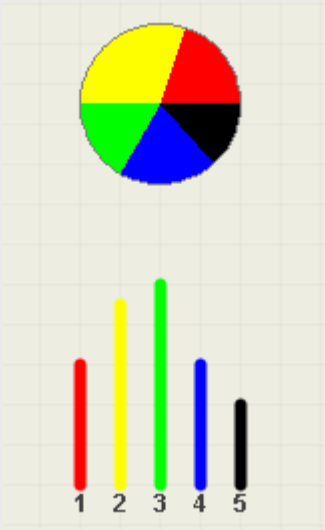
Lembra que a probabilidade de Laplace só pode aplicarse cando os sucesos elementais son equiprobables.

REGRA DE LAPLACE

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

P( )=1/6

Autoavaliación



1. Acha a frecuencia con que aparece o número 3 nos resultados desta enquisa sobre o número de irmáns: 5 2 1 1 3 2 2 3 4 4 5 3 1 1 4 3 4 1 4 1 1 4 1 1 5.

2. Se a frecuencia dun valor é 49 e a súa frecuencia relativa é 0,98, calcula o tamaño da mostra ou número total de datos.

3. Calcula os graos que lle corresponden ao sector dun diagrama que representa o 5 na seguinte recollida de datos: 1 1 2 5 4 3 2 1 2 1 3 2 4 3 5 2 2 3 1 4 2 5 2 2 1 1 3 3 2 5 .

4. Frecuencia relativa da variable á que corresponde un sector de 72º.

5. Os dous diagramas da esquerda corresponden aos mesmos datos, pero unha barra está mal trazada, cal?

6. Cantos sucesos elementais se presentan ao extraer sucesivamente e con devolución 3 bólas dunha urna con 6 bólas?

7. Dunha urna cos números do 1 ao 50 extráese un. Se A é o suceso "sacar divisor de 14" e B, " sacar divisor de 6", Cantos sucesos elementais compoñen AUB?

8. Dunha urna con números do 1 ao 29 extráese un. Se A é o suceso "sacar múltiplo de 5" e B, " sacar múltiplo de 3", Cantos sucesos elementais compoñen $A \cap B$?

9. Acha a probabilidade de que ao extraer unha carta dunha baralla española sexa un ás.

10. No partido do equipo A contra o B os posibles resultados son 1, x ou 2. Podemos dicir que a probabilidade de 1 é 1/3?

Solucións dos exercicios para practicar

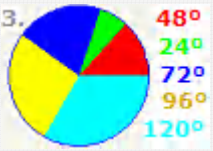
1.

	Poboación	Variables
a	Españois maiores de 20 anos no 2007	Sexo, cualitativa Edad, cuantitativa E. universitarios, si ou non, cualitativa
b	Profesores Univ. En España 05-06	Ensinanza que imparten, cualitativa Sexo, cualitativa
c	Como en b	Categoría do posto Sexo, cualitativas

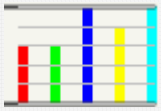
2.

x	0	1	2	3	4
f	2	4	4	3	2

3.



4.



5.

%	15	20	10	15	40

6. Total=20; turquesa→3 **7.** 10.

8. Ceuta e Melilla; de 4124 a 4796.

9. 90%; 50%; nos homes apenas inflúe, nas mulleres si.

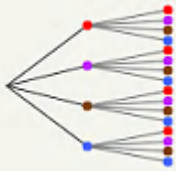
10. 20200000; 2300000.

11. 12/22 = 6/11

12. 3/15 = 0,2

13. AUB = {1, 3, 5, 7, 8, 9};
$A \cap B$ = {5, 8, 9}

14.



16; sin dev.→ 12.

15. a 5/11; b 5/11; c 2/11; d 8/11.

16. Se son 12, os do nº 10 e 11 teñen máis probabilidade que o resto; se son 20 todos teñen a mesma probabilidade.

17. Non, os sucesos non son equiprobables.

18. Si, sucesos equiprobables.

19. Suma 4→3/216; Suma 5→ 6/216.

Solucións AUTOAVALIACIÓN

1. 4

2. 50

3. 48

4. 0,2

5. 3

6. 216

7. 6

8. 1

9. 0,1

10. Non, non son equiprobables.

Non esquezas enviar as actividades ao titor ▶