Poleas

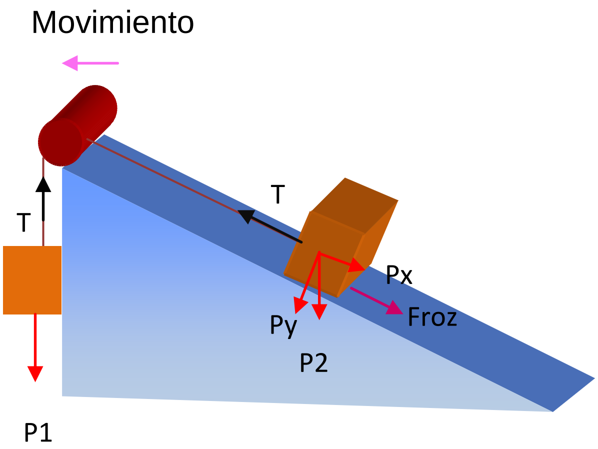
En el extremo superior de un plano inclinado 30^0 sobre la horizontal hay una polea (que supondremos de masa y rozamiento despreciable) por cuya garganta pasa un cordón. Uno de los ramales del cordón sostiene una masa (m_2) de 10Kg, el otro se mantiene paralelo al plano inclinado y tiene atado en su extremo un cuerpo de masa (m_1) de 10kg; el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es 0,5. Calcular:

1.-La aceleración del sistema.

2.-La tensión de la cuerda.

3.-Calcula la aceleración y la tensión de la cuerda en ausencia de rozamiento, teniendo en cuenta que la masa de la polea es de 2 kg

4.-Ahora, realiza los mismos cálculos que en el apartado anterior, teniendo en cuenta además de la masa de la polea, el coeficiente de rozamiento cuyo valor es 0.3.

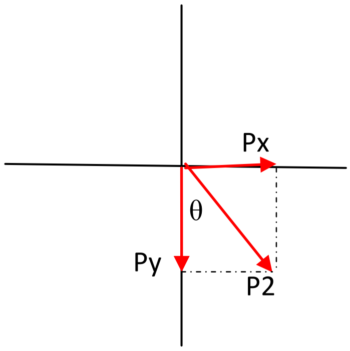


1.-Sea las componentes del

peso del objeto2:

$P_x = m_2 g sen\theta$

$P_y = N = m_2 g cos\theta$



Las condiciones de movimiento en el sentido indicado en el dibujo son:

$F_{roz} = \mu N = \mu m_2 g cos\theta$

$m_1 g \geq m_2 g sen\theta + F_{roz}$, entonces $m_1 \geq m_2 sen\theta + \mu m_2 cos\theta$

y como $m_1 = 10$ kg y $m_2 sen\theta + \mu m_2 cos\theta = 9{,}33$ Kg, el sistema se moverá en este sentido con una aceleración constante.

Aplicando el segundo principio de Newton a cada uno de los cuerpos resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{T} + m_1\mathbf{g} = m_1\mathbf{a} \\ \mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{F_{roz}} + m_2\mathbf{g} = m_2\mathbf{a} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} m_1 g - T = m_1 a \\ T - m_2 g sen\theta - \mu m_2 g cos\theta = m_2 a \end{array}\right\}$$

Para resolver este sistema sumamos ambas ecuaciones,

$m_1 g - m_2 g sen\theta - \mu m_2 g cos\theta = (m_1 + m_2)a$

$a = g\,(m_1 - m_2 sen\theta - \mu m_2 cos\theta) / (m_1 + m_2)$

Sustituyendo los datos obtenemos:

$a = 9{,}8\,(10 - 9{,}33) / 20$

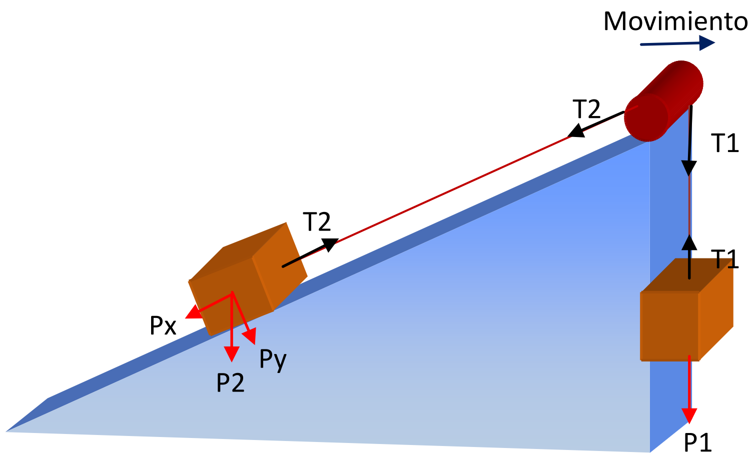
$a = 0{,}33\ m/s^2$

2.- La tensión de la cuerda la calculamos despejándola en la primera ecuación:

$T = m_1 g - m_1 a$

$T = m_1\,(g – a)$

$T = 10\,(9{,}8 – 0{,}33) = 94{,}7$ N



3.-Si no existe rozamiento, los momentos de los pares que actúan en el momento de dejar en libertad el sistema verifican.

$$m \bullet g \bullet r > P_x \bullet r \rightarrow m \bullet g > m \bullet g \bullet sen(\theta) \rightarrow 1 > sen(\theta)$$

condición que nos da el sentido del movimiento, hacia la derecha.

Si aplicamos la ley de la Dinámica al diagrama de fuerza de la figura de arriba, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} m \bullet g - T_1 = m \bullet a \\ T_2 - P_x = m \bullet a \\ N = (T_1 - T_2) \bullet r \\ N = I \bullet \alpha \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} T_1 = m \bullet g - m \bullet a \\ T_2 = m \bullet a + m \bullet g \bullet sen(\theta) \end{array}$$

Y como: $a = \alpha \bullet r$ $\quad I = 1/2 \bullet m_p \bullet r^2$

Sustituyendo:

$$((m \bullet g - m \bullet a) - (m \bullet a + m \bullet g \bullet sen(\theta))) \bullet r = 1/2 \bullet m_p \bullet r^2 \bullet (a/r)$$

$$(m \bullet g \bullet (1 - sen(\theta)) - 2 \bullet m \bullet a) \bullet r = 1/2 \bullet m_p \bullet r \bullet a$$

$$m \bullet g - m \bullet g \bullet sen(\theta)) - 2 \bullet m \bullet a = 1/2 \bullet m_p \bullet a$$

$$m \bullet g - m \bullet g \bullet sen(\theta)) = 2 \bullet m \bullet a + 1/2 \bullet m_p \bullet a$$

$$m \bullet g - m \bullet g \bullet sen(\theta)) = m_p \bullet a + 4 \bullet m \bullet a/2$$

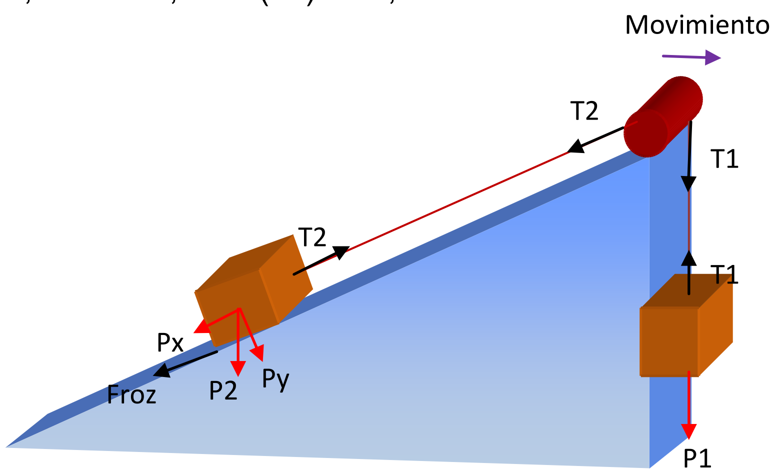
$$(2 \bullet m \bullet g - 2 \bullet m \bullet g \bullet sen(\theta)) = (m_p + 4 \bullet m) \bullet a$$

$$a = (2 \bullet m \bullet g \bullet (1 - sen(\theta)) / (m_p + 4 \bullet m)$$

$$a = 9{,}8 \bullet 2 \bullet 10 \bullet (1 - sen(30))/(2 + 4 \bullet 10) = 2{,}33 \text{ m/s}^2$$

$T1 = m\cdot(g-a) = 10\ (9,8 – 2,33)= 74.7N$

$T2 = m\cdot a + m\cdot g\cdot sen(\theta) = 10 \cdot 2,33 + 10\cdot 9,8\cdot sen(30) = 72,3N$



4.-En caso de existir rozamiento entre el objeto y el plano inclinado, los momentos de los pares de fuerzas que actúan al dejar el sistema en libertad son:

$m\cdot g\cdot r > (P_x + Froz)\cdot r \rightarrow m\cdot g > m\cdot g\cdot(sen(\theta) + \mu\cdot cos(\theta))\cdot r \rightarrow 1>sen(\theta) + \mu\cdot cos(\theta)$

puesto que: $1>0,5+0,3\cdot cos(30)$

entonces el sentido del movimiento es el indicado en la figura superior.

Ahora volvemos a aplicar la ley de la Dinámica al diagrama de fuerzas, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} m\cdot g-T_1 &= m\cdot a \\ T_2-P_x-Froz &= m\cdot a \\ N &= (T_1-T_2)\cdot r \\ N &= I\cdot\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} T_1 &= m\cdot g- m\cdot a \\ T_2 &= m\cdot a + m\cdot g\cdot(sen(\theta) + \mu\cdot cos(\theta)) \end{aligned}$$

Y como: $a = \alpha\cdot r$ $\quad I=1/2\cdot m_p\cdot r^2$

Sustituyendo:

$$((m\cdot g- m\cdot a)-(m\cdot a + m\cdot g\cdot sen(\theta) + \mu\cdot cos(\theta))\cdot r= 1/2\cdot m_p\cdot r^2\cdot(a/r)$$

$$((m\cdot g-2\cdot m\cdot a)- m\cdot g\cdot(sen(\theta)+\mu\cdot cos(\theta)))= 1/2\cdot m_p\cdot a$$

$$m\cdot g\cdot(1-(sen(\theta)-\mu\cdot cos(\theta)))= 1/2\cdot m_p\cdot a + 2\cdot m\cdot a$$

$$2\cdot m\cdot g\cdot(1-(sen(\theta)-\mu\cdot cos(\theta)))= (m_p + 4\cdot m)\cdot a$$

$$2\cdot m\cdot g\cdot(1-(sen(\theta)-\mu\cdot cos(\theta)))/ (m_p + 4\cdot m) = a$$

$$a = 2\cdot 10\cdot 9.8\cdot(1-(sen(30)-0{,}3\cdot cos(30)))/\ (2 + 4\cdot 10) = 1{,}12\ m/s^2$$

Por tanto las tensiones serán:

$T_1 = m\cdot g - m\cdot a = 10\ (9{,}8-1{,}12) = 86{,}8N$

$T_2 = m\cdot a + m\cdot g\cdot(sen(\theta) + \mu\cdot cos(\theta)) = 10\cdot 1{,}12 + 10\cdot 9{,}8\cdot(sen(30) + 0{,}3\cdot cos(30)$

$T_2 = 85{,}7N$