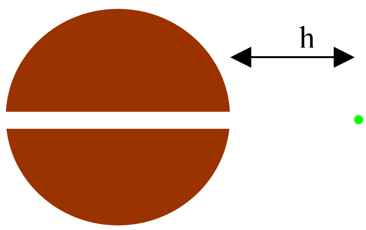
CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

Suponiendo la Tierra una esfera de densidad constante, se pide: a) El campo gravitatorio creado a r = 2R, r = R y R = R/3, siendo r la distancia al centro de la Tierra. b) Demostrar que si se hiciera un túnel sin ficción a través de la Tierra y a lo largo de uno de sus diámetros y, dejásemos una masa m en el mismo, su movimiento sería armónico simple. c) Determinar su periodo. d) Si dejásemos m libre en uno de los extremos del túnel ¿con qué velocidad pasaría por el centro de la Tierra?. e) Lo mismo si dejásemos m a una altura h sobre el túnel, tal y como indica la figura, ¿será entonces un movimiento armónico simple? ¿será periódico? Dar respuestas razonadas.
Datos: $R = 6'37 \cdot 10^{6}$ m , $M = 5'98 \cdot 10^{24}$ Kg , $G = 6'67 \cdot 10^{-11}$ $m^3\ Kg^{-1} s^{-2}$.



Recordemos que, toda masa situada en las proximidades de la Tierra o en su interior, cualquier masa m resulta atraída hacia el centro de la misma, y que se define, **intensidad del campo gravitatorio** , como una fuerza por unidad de masa situada en el punto correspondiente. Sus unidades serán N/Kg. Es una definición.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Ante las preguntas del apartado a), cabe suponer que, a medida que nos vayamos alejando de la superficie de la Tierra (y por tanto aumentado r), el campo gravitatorio irá disminuyendo y que, a medida que vayamos profundizando hacia el centro de la misma (disminuyendo r) también irá disminuyendo, siendo cero en el centro de la misma, pues en ese punto hay igual masa de la Tierra en todas direcciones. El valor máximo del campo gravitatorio debe alcanzarse en la superficie de la misma.

Para llegar a la expresión del **campo gravitatorio terrestre para puntos situados de manera que r ≥ R**, recordemos la ley de Newton de gravitación universal (que se deduce de las leyes de Kepler y de comparar la atracción que ejerce la Tierra sobre la Luna y sobre cualquier masa sobre la superficie terrestre) que se resume en:

$$\vec{F} = -G\frac{M.m}{r^2}\vec{u}_r$$

De esta forma, el **campo gravitatorio terrestre para los puntos situados en la superficie de la Tierra y mucho más allá de la misma, r ≥ R vendrá dado por:**

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-\frac{G.M.m}{r^2}\vec{u}_r}{m} = -\frac{G.M}{r^2}\vec{u}_r$$

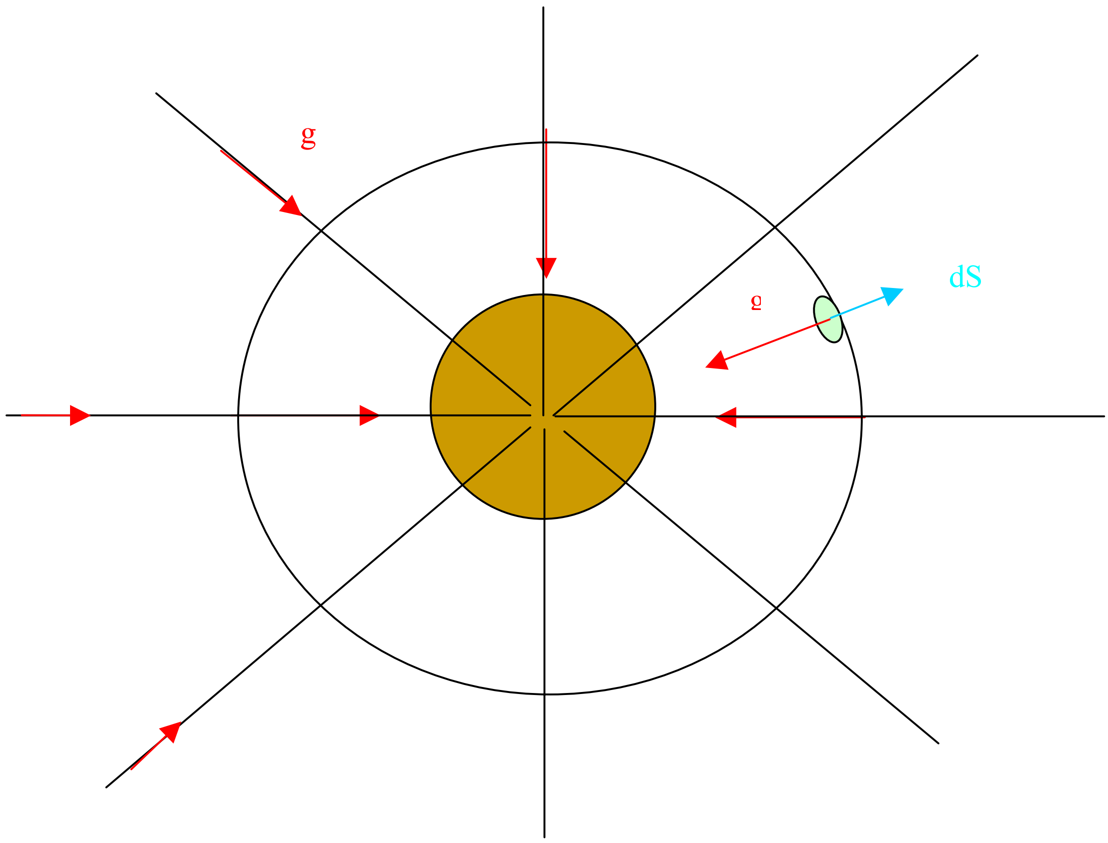
Como vemos, dirección radial (**u$_r$**) y sentido hacia el centro de la Tierra.

Para determinar el **campo gravitatorio terrestre dentro de la Tierra hasta su centro, es decir para puntos en los que r < R** , vamos a utilizar el " Teorema de Gauss". En un campo vectorial, **se define** flujo de un vector a través de una superficie como el producto escalar de ese vector por el vector superficie.

$\phi = \vec{g}.\vec{S}$ para una superficie elemental $d\phi = \vec{g}.d\vec{S}$

Considerando el campo gravitatorio terrestre y eligiendo el flujo a través de una superficie esférica con centro en el centro de la Tierra, de radio r > R , tendremos que considerar un pequeño elemento de dicha superficie e integrar a toda la superficie esférica correspondiente.

$$\phi = \oint \vec{g}.d\vec{S} = \vec{g}\oint d\vec{S} = -\frac{GM}{r^2}.4\pi.r^2 = -G.4\pi.M$$

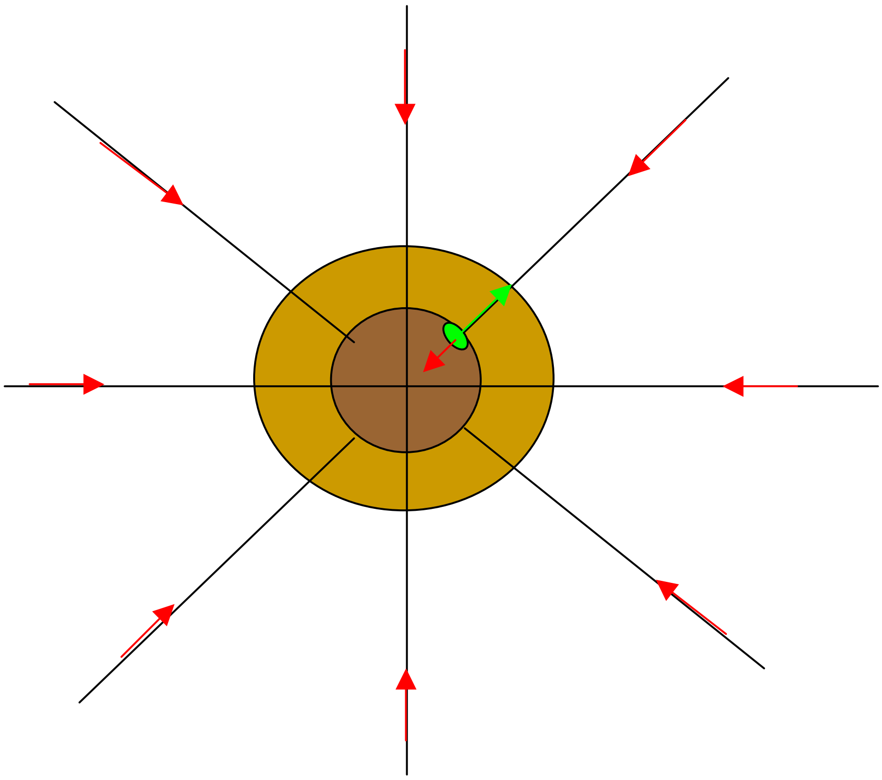


como M es la masa total dentro de nuestra superficie, en general el flujo a través de una superficie cerrada será:

$$\phi = G.4\pi\sum_{\text{int}} m_{\text{int}}$$

Siendo m_{int} la masa creadora del campo, **situada dentro de la superficie cerrada.**

Utilizando esta expresión para calcular el flujo entrante a través de una superficie esférica de radio r < R , tendremos que considerar sólo la masa contenida en <u>su interior</u>, de manara que:



$$\oint \vec{g}.d\vec{S} = -4\pi G\sum m_{\text{int}} \qquad \oint g.dS.\cos 180 = -4\pi G\frac{4}{3}\pi.r^3\rho$$

Siendo ρ la densidad de la esfera. Como **g** se mantendrá constante en módulo, en todos los puntos de la superficie de la esfera de radio **r** considerada y, la integral de dS a lo largo de toda la esfera es $4\pi\ r^2$, tendremos:

$$-g.4\pi.r^2 = -4\pi.g.\frac{4}{3}\pi.r^3.\rho \quad \text{de donde} \quad g = G\frac{4}{3}\pi.\rho.r$$

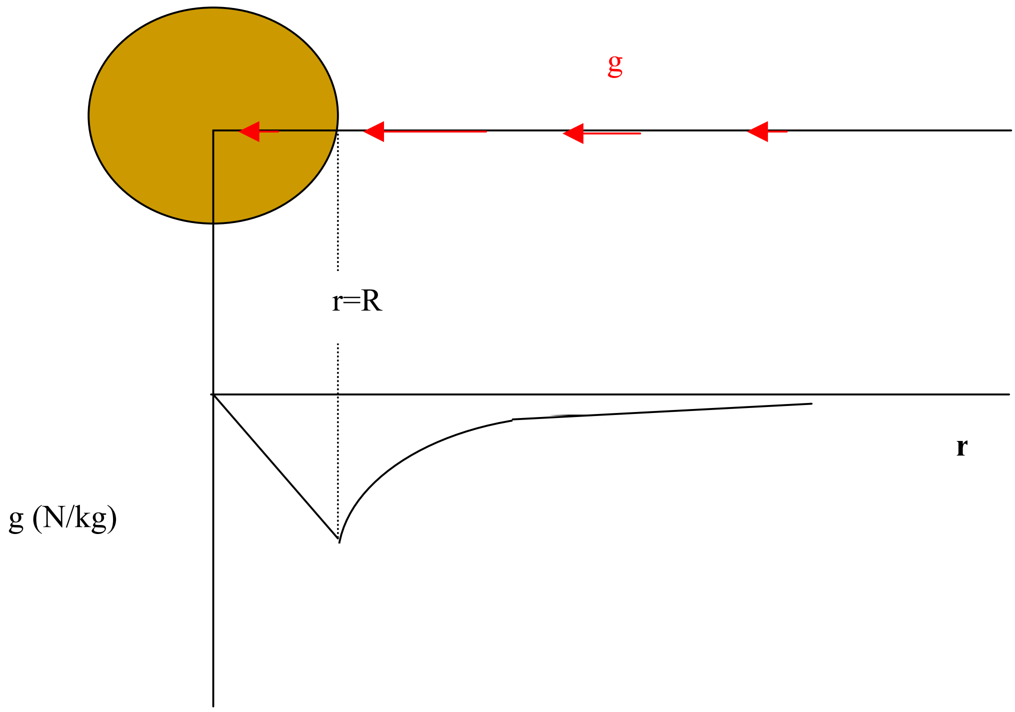
Si substituimos el valor de la densidad de la Tierra por su expresión, tendremos.

$$g = G\frac{M}{R^3}.r$$

Como vemos, el campo gravitatorio dentro de una esfera homogénea (la Tierra), depende linealmente de la distancia al centro de la misma. En resumen:

Para $r \geq R$ $\quad \vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$ el campo disminuye con la inversa del cuadrado de la distancia al centro de la Tierra.

Para $r \leq R$ $\quad \vec{g} = -G\frac{M}{R^3}.r.\vec{u}_r$ el campo gravitatorio parte de cero en el centro de la Tierra y aumenta de manera directamente proporcional a la distancia al centro de la misma, alcanzando su valor máximo en la superficie de la esfera (Tierra).



Como vemos, el máximo valor del campo gravitatorio terrestre, se alcanza en su superficie. Contestando a las preguntas del problema, la intensidad del campo gravitatorio terrestre, en los puntos aludidos será:

Para r = R $\quad g_o = -G\frac{M}{R^2} = -\frac{6'67.10^{-11}.5'98.10^{24}}{(6'37.10^6)^2} = -9'82 N.Kg^{-1}$

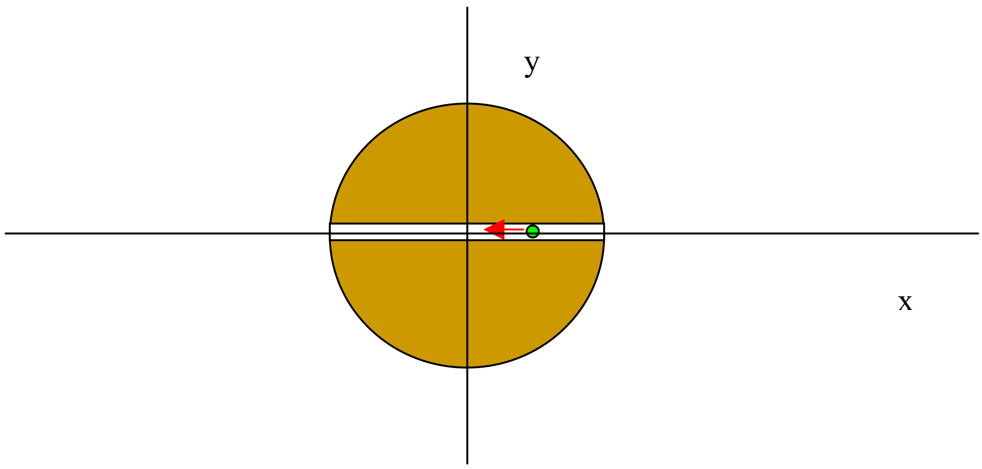
Para r = 2R $\quad g = -G\frac{M}{r^2} = \frac{g_o}{4} = -2'46 N.Kg^{-1}$

Para r = R/3 $\quad g = -G\frac{M}{R^3}.r = \frac{g_o}{3} = -3'28 N.Kg^{-1}$

El menos sólo significa que el vector campo gravitatorio **g** es siempre hacia el centro de la Tierra.

b) Si se hiciera un túnel sin ficción a través de la Tierra y coincidiendo con uno de sus diámetros, y, dejásemos en libertad una masa m, en la boca del mismo, su movimiento sería **armónico simple, pues la fuerza que actúa sobre m** depende linealmente de la distancia al centro de la Tierra y con un sentido hacia el cento de la misma, es decir es del tipo:

$F = g.m = -G\frac{Mm}{R^3}r$ de donde $a = -\frac{GM}{R^3}r = -K.r$



c) Haciendo coincidir el eje de las x con el túnel y, situando el origen del mismo en el centro de la Tierra, las ecuaciones cinemáticas de la masa m serán:

x = R cos wt
v= -Rw sen wt
a = R w^2 cos wt = x.w^2

Como la aceleración hemos visto antes que viene dada por:

$$a = -\frac{GM}{R^3}x$$ tendremos que $$\omega^2 = \frac{GM}{R^3}$$ como

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GM}{R^3}$$ de donde el periodo será $$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

En nuestro caso concreto, con los valores de masa de la Tierra, radio de la misma y G, el periodo resultaría ser de 5058 s o lo que es lo mismo 84´3 minutos.

d) Para averiguar la velocidad con la que pasaría la masa m por el centro de la Tierra, como conocemos sus ecuaciones cinemáticas, sólo tendríamos que calcular el valor de $\mathbf{v_{mx}= R.w}$ con lo que obtenemos el valor de 7913 m/s.

Un razonamiento alternativo para la resolución de este apartado es la utilización del **principio de conservación de la energía** ya que el campo gravitatorio es un campo conservativo. En este caso, lo primero será llegar a la expresión de la energía potencial gravitatoria del sistema m-Tierra cuando m esté en el túnel.

Como siempre debe cumplirse:

$$-\Delta E_p = \int_1^2 F.dr \qquad E_{p1} - E_{p2} = \int_1^2 -G\frac{Mm}{R^3}r.dr$$

$$-G\frac{Mm}{R} - E_{p2} = -G\frac{M}{R^3}m\left[\frac{r^2}{2}\right]_R^r$$ Por lo que, simplificando, nos da un valor para la energía potencial del sistema m-Tierra cuando $r \leq R$ de:

$$E_p = \frac{GMm}{2R}\left[\frac{r^2}{R^2} - 3\right]$$ con lo que la energía potencial gravitatoria cuando m esté en el centro de la Tierra será:

$$E_p = -\frac{3GMm}{2R}$$

Aplicando al sistema m-Tierra, el principio de conservación de la energía cuando m pasa de la superficie de la Tierra al centro de la misma tendremos:

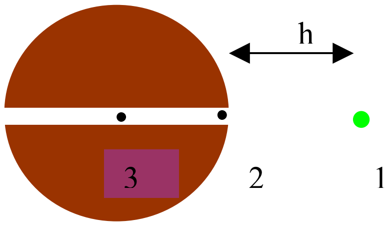
$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}$

Pues no hay trabajo exterior realizado sobre el sistema y, las fuerzas disipativas (de rozamiento) hemos considerado que son nulas.

$$0+\left[-\frac{GMm}{R}\right]=\frac{1}{2}mv^2+\left[-\frac{3GMm}{2R}\right]$$

De donde obtenemos el valor de la velocidad cuando pase por el centro de la Tierra al caer desde su superficie, de v = 7913 m/s el mismo valor que obtuvimos por el razonamiento cinemático.

C) Si dejásemos caer m desde una altura h sobre el túnel, tal y como indica la figura:



Al caer la masa desde el punto 1 al 2, su aceleración va aumentando a medida que disminuye la distancia al punto 2, y lo hace con la inversa del cuadrado de la distancia. Una vez entra en el túnel, la aceleración disminuye a medida que lo hace la distancia al centro de la Tierra de manera directamente proporcional. Es decir.

De 1 a 2 $a=-\frac{k_{.1}}{r^2}$ y de 2 a 3 $a=-k.r$

Por tanto como en el primer tramo, la aceleración **no es directamente proporcional a la distancia al centro de la Tierra (r), el movimiento NO ES VIBRATORIO ARMÓNICO SIMPLE.** Sin embargo **SÍ SERÁ PERIÓDICO,** ya que, una vez llega la masa al centro de la Tierra con una velocidad que determinaremos, continúa por el túnel con una velocidad cada vez menor ya que la aceleración habrá cambiado de signo, y, cuando llegue a la otra boca del túnel (con la misma velocidad con la que entró), se alejará de la superficie terrestre cada vez a menor velocidad hasta volver a alcanzar la altura h , la otra parte de la Tierra, repitiéndose luego el ciclo en sentido inverso e indefinidamente ya que el sistema m-Tierra es conservativo y no se pierde nada de energía.

Para calcular en éste caso en el que dejamos caer m desde una altura h sobre la boca del túnel, la velocidad con la que llega al centro de la Tierra **tendremos que hacerlo energéticamente** (ya que la aceleración depende de la posición y de manera compleja en cada punto, tanto fuera como dentro del túnel).

Para aplicar el principio de conservación de la energía para el paso de m del punto 1 al 3, escribiremos:

$E_{c1} + E_{p1} = E_{c3} + E_{p3}$

La energía potencial del sistema en la posición 1 (lo mismo que para todos los puntos situados más allá de la superficie terrestre y hasta alturas considerables), la calculamos utilizando la ley de Newton de gravitación universal y la defición de energía potencial gravitatoria, es decir utilizando:

$$-\Delta E_p = \int_r^\infty \vec{F}.d\vec{r} = \int_r^\infty -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

Considerando que integramos desde r hasta ∞ , y que a distancias de infinito la energía potenciad del sistema m-Tierra es cero, obtenemos para la energía potencial en esos puntos para los cuales $r > R$, la siguiente expresión:

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{R+h}$$

Recordando la expresión de la energía potencial del sistema cuando m está en el centro de la Tierra:

$$E_p = -\frac{2}{3}\frac{GMm}{R}$$

Aplicando el principio de conservación de la energía entre 1 y 3 .

$$0 + \left(-\frac{GMm}{R+h}\right) = \frac{1}{2}m.v_3^2 + \left(-\frac{3GMm}{2R}\right)$$

de donde, despejando **v_3** , tenemos para la velocidad en el centro de la Tierra la expresión:

$$v_3 = \sqrt{\frac{3GMh + GMR}{R^2 + R.h}}$$

Comprueba que la expresión se cumple para valores como h=0 y que su valor es indeterminado para h=∞.
Comprueba todas las expresiones en el applet para distintos valores de h.