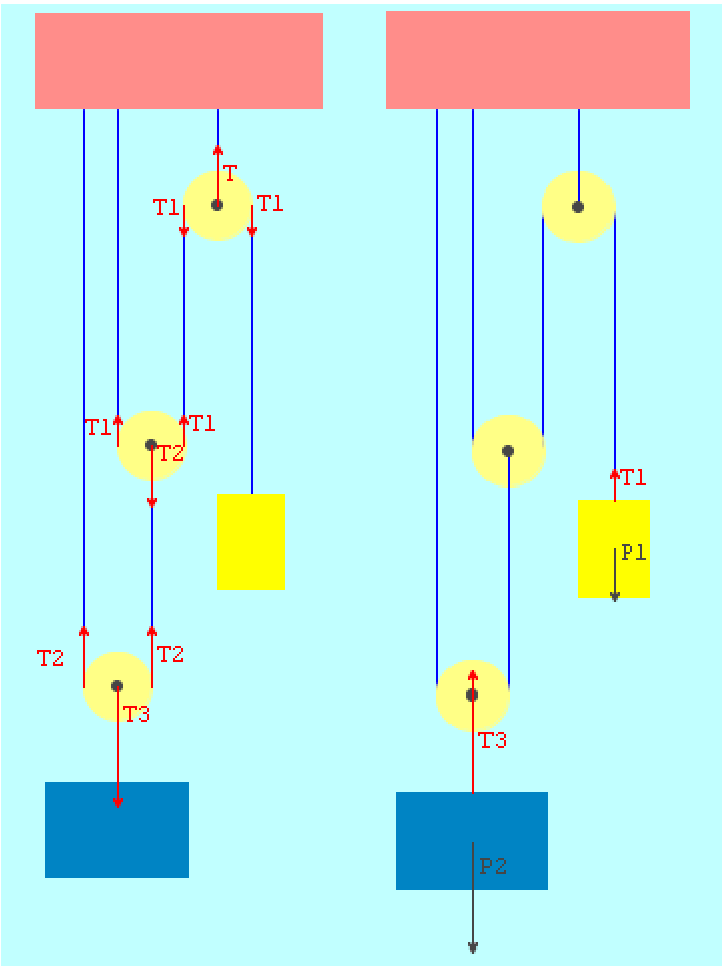
ASOCIACIÓN DE POLEAS

Dos objetos de masas m_1 y m_2 cuelgan de un conjunto de poleas combinadas de dos formas distintas (asociación A y B). Calcula en qué condiciones el conjunto se encuentra en equilibrio.Calcula en qué condiciones el conjunto se encuentra en equilibrio. Calcula la aceleración de cada uno de los objetos y la tensión de las cuerdas cuando no existe ese equilibrio.

Concreta para los casos m_1=30 Kg y m_2=150 Kg. Considera las poleas y cuerdas con masas despreciables

Asociación A

Las fuerzas que actúan sobre cada uno de los elementos del sistema son las que se muestran en el dibujo. Siendo T, T_1, T_2 y T_3 las tensiones en las distintas cuerdas y P_1, P_2 los pesos de las masas. Para que el conjunto se encuentre en equilibrio la suma de todas las fuerzas que actúen sobre cada uno de los elementos debe ser cero. Además, los momentos de las fuerzas también deben ser nulos. Estas consideraciones permiten escribir las siguientes ecuaciones:



$$T - 2\cdot T_1 = 0$$
$$2\cdot T_1 - T_2 = 0$$
$$2\cdot T_2 - T_3 = 0$$
$$T_1 - P_1 = 0$$
$$T_3 - P_2 = 0$$

Ecuaciones que conducen a los siguientes resultados:

a) La tensión de la cuerda (T_1) que sujeta a la masa pequeña (en amarillo) es la mitad de la tensión la cuerda que tira de la segunda polea móvil (T_2) y es un cuarto de la tensión de la cuerda (T_3) que sujeta a la masa grande (en azul).

b) El valor de estas tensiones es:

$$T_1 = \frac{1}{5}\cdot(m_1 + m_2)\cdot g$$

$$T_2 = \frac{2}{5}\cdot(m_1 + m_2)\cdot g$$

$$T_3 = \frac{4}{5}\cdot(m_1 + m_2)\cdot g$$

c) La relación entre los pesos de ambas masas es:

$$P_1=\frac{1}{4}\cdot P_2$$

La ventaja mecánica se pone claramente de manifiesto. Con sólo un peso que es la cuarta parte del otro el sistema ya está en equilibrio. Si se añadiera otra polea móvil más, la relación sería tan solo de un octavo. En general, para esta forma de combinar las poleas se puede escribir la siguiente ecuación

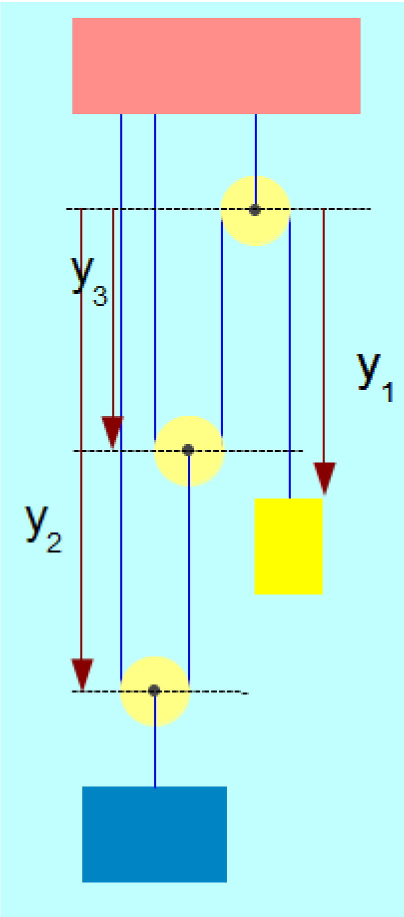
$$P_1=\frac{1}{2^n}\cdot P_2$$

Siendo *n* el número de poleas móviles.

Si la relación entre pesos no fuera la anterior, entonces el conjunto no estaría en equilibrio y se movería con aceleración. Las ecuaciones aplicables a las masas deben escribirse ahora:

$$T_1-P_1=m_1\cdot a_1$$
$$T_3-P_2=m_2\cdot a_2$$

Siendo a_1 y a_2 las aceleraciones con las que se mueve cada una. Ambas están relacionadas ya que si una de la masas desciende la otra asciende y no puede hacerlo en cualquier cantidad. Tomando como origen de distancias el eje de la polea fija, se debe cumplir durante todo el movimiento de la masa amarilla que la suma de $2y_3+y_1$ debe permanecer constante (es decir, longitud de la cuerda que sujeta a esta masa no puede cambiar a lo largo del movimiento). Por tanto, cualquier cambio debe ser tal que cumpla:



$$2\cdot\Delta y_3+\Delta y_1=0$$
$$\Delta y_3=\frac{-1}{2}\Delta y_1$$

Esto implica que cuando la masa amarilla desciende (o asciende) una distancia, la primera polea móvil sube (o baja) la mitad de esa distancia. La velocidad y a aceleración guardarán la misma relación.
Razonando de la misma forma para la segunda polea móvil, se debe cumplir que $y_2+(y_2-y_3)$, que es la longitud de la cuerda que sujeta a esta polea, debe permanecer constante. Por tanto, a lo largo del tiempo:

$$2\cdot\Delta y_2-\Delta y_3=0$$
$$\Delta y_2=\frac{1}{2}\Delta y_3$$

Resultado que nos indica, que si la primera polea sube (o baja) la segunda polea hace lo mismo, pero recorre una distancia que es la mitad de la de la primera polea móvil. La velocidad y la aceleración guardarán la misma relación.
Combinando este resultado con el anterior y sabiendo que la aceleración de la segunda polea móvil es igual a la aceleración de la masa azul, se puede escribir:

$$a_1=-4\cdot a_2$$

Como la masa de las poleas se considera despreciable (es decir, nula) el producto de su masa por la aceleración será nulo y por tanto, las ecuaciones que se les aplican siguen siendo las mismas y se obtiene el mismo resultado $T=2T_1$, $T_2=2T_1$ y $T_3=4T_1$.

Reordenando todos estos resultados anteriores y despejando nos queda que las aceleraciones valen:

$$a_2=\frac{4\cdot m_1\cdot g-m_2\cdot g}{16\cdot m_1+m_2}$$

$$a_1=\frac{-16\cdot m_1\cdot g+4\cdot m_2\cdot g}{16\cdot m_1+m_2}$$

Una vez obtenidas las aceleraciones, los valores de tensiones en las cuerdas se calculan sustituyendo adecuadamente.

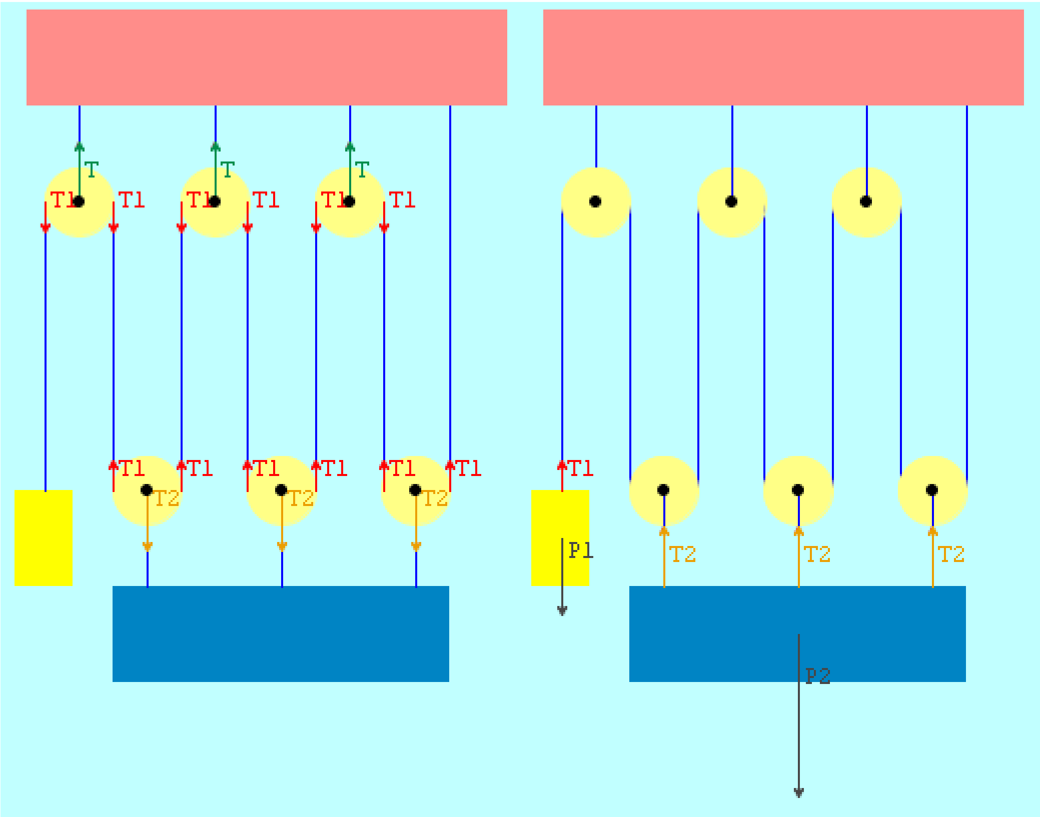
Concretando para los casos de m_1= 30 kg y m_2= 150 kg. El sistema estaría en equilibrio si la pareja de masas hubiese sido 30 kg y 120 kg o bien 37,5 kg y 150 kg.

En las condiciones que se dan el problema el peso de la masa m_2 es superior a 4 veces el peso de la masa m_1, lo que hará que la masa m_2 descienda con una aceleración -0,138 m/s^2 (el signo informa del sentido del movimiento) y la masa m_1 suba con una aceleración de 0,552 m/s^2. Los valores de las tensiones son T= 724,65 N, T_1= 362,32 N , T_2= 724,65 N y T_3= 1449,30 N.

Asociación B

Procediendo de la misma forma que en caso anterior, suponiendo que existe equilibrio, se pueden escribir las siguientes ecuaciones:

$$T-2\cdot T_1=0$$
$$2\cdot T_1-T_2=0$$
$$T_1-P_1=0$$
$$3\cdot T_2-P_2=0$$



De esas ecuaciones se llega al resultado de que la relación entre pesos para que el sistema se encuentre en equilibrio es:

$$P_1=\frac{1}{6}\cdot P_2$$

Las tensiones de las cuerdas pueden calcularse:

$$T_1=m_1\cdot g=\frac{1}{6}m_2\cdot g$$

$$T_2=\frac{1}{3}m_2\cdot g=2\cdot m_1\cdot g$$

Si añadiésemos más poleas móviles encontraríamos la siguiente relación entre ambos pesos:

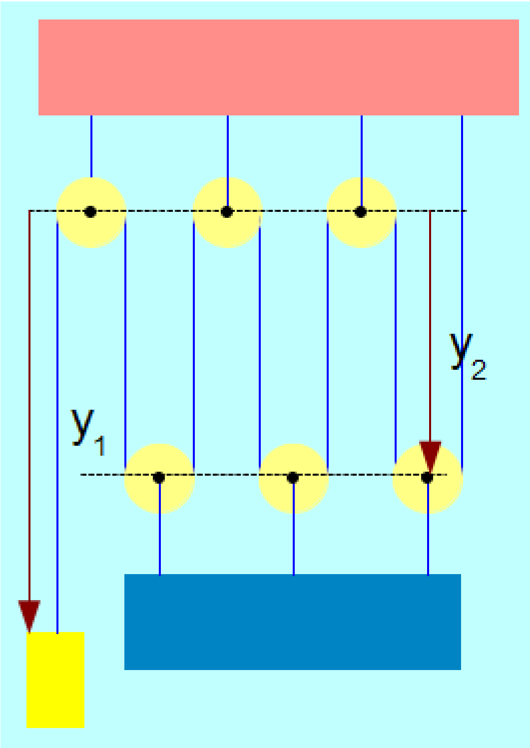
$$P_1=\frac{1}{2\cdot n}\cdot P_2$$

Siendo n el número de poleas móviles.

Cuando la relación entre los pesos fuera diferente a la anteriormente establecida, el conjunto se movería con aceleración. Las ecuaciones aplicables a las masa y a resolver ahora serían (teniendo en cuenta que la masa de las poleas y cuerdas es despreciable):

$$T-2\cdot T_1=0$$
$$2\cdot T_1-T_2=0$$
$$T_1-P_1=m_1\cdot a_1$$
$$3\cdot T_2-P_2=m_2\cdot a_2$$

Siendo a_1 y a_2 las aceleraciones con las que se mueve cada masa. Ambas aceleraciones están relacionadas. Tomando como origen de distancias los ejes de la poleas fijas, se debe cumplir durante todo el movimiento que la suma y_1+6y_2 debe permanecer constante. Por tanto, cualquier cambio en esas distancias debe cumplir que:



$$\Delta y_1+6\cdot\Delta y_2=0$$
$$\Delta y_2=\frac{-1}{6}\Delta y_1$$

Es decir, cuando la masa amarilla desciende una cantidad, la masa azul lo hace sólo un sexto.

Esa mima relación se mantiene para velocidades y aceleraciones, luego:

$$a_1=-6\cdot a_2$$

Resolviendo todas las ecuaciones, queda

$$a_2=\frac{6\cdot m_1\cdot g-m_2\cdot g}{36\cdot m_1+m_2}$$
$$a_1=\frac{-36\cdot m_1\cdot g+6\cdot m_2\cdot g}{36\cdot m_1+m_2}$$

Las tensiones en las cuerdas se pueden calcular sustituyendo adecuadamente en las ecuaciones.

Para el caso de m_1= 30 kg y m_2= 150 kg. El sistema estaría en equilibrio si la pareja de masas hubiese sido 30 kg y 180 kg o bien 25 kg y 150 kg.

En las condiciones que se dan, el peso de la masa m_2 es inferior a 6 veces el peso de la masa m_1, lo que hará que la masa m_2 ascienda con una aceleración 0,239 m/s^2 y la masa m_1 baje con una aceleración de -1.43 m/s^2. Los valores de las tensiones son T= 501,95N, T_1= 250,98 N , T_2= 501,95 N.