1. Introdución

Desde sempre, a explicación última da interacción entre dúas partículas carrexou moitos interrogantes. Especialmente se os corpos non se atopaban en contacto directo. Realmente, o contacto é só una apariencia macroscópica, posto que, desde o punto de vista microscópico, dous obxectos que parecen estar moi próximos un do outro teñen que manter una separación entre si. Hai que ter en conta que incluso entre os electróns e o núcleo atómico arredor do cal xiran existe una distancia dunha orde de magnitude de 1 Å (1 Å=10^{-10} m) e, sen embargo, non podemos negar que entre eles aparezan unhas forzas. Polo tanto, a explicación de como dúas partículas interaccionan ten que ter a mesma base, independentemente de que en aparencia os dous corpos estean ou non en contacto.

Ao longo da historia, moitos científicos buscaron respostas, que basicamente poden resumirse en dúas:

- Mediante o concepto de acción a distancia, proposto por Newton, que establecía que os corpos están formados por corpúsculos que actúan a distancia uns sobre outros instantaneamante.
- Mediante o concepto de **campo**, desenvolvido por Faraday, Maxwell, Hertz e Einstein, entre outros, que afirma que os corpos producen unha perturbación das propiedades do medio onde se atopan, e é esta perturbación a que exerce a acción mútua entre eles.

A primeira teoría é máis simple en situacións estáticas pero presenta problemas irresolubles cando os corpos se moven, pois a propagación dos sinais entre eles debera ser instantánea. A teoría de campos explica as forzas que aparecen entre, por exemplo, dúas cargas eléctricas, supoñendo que o espazo que as separa ten a calidade de poder tirar delas ou empurralas.

As forzas que actuaban, non se sabe ben como, a largas distancias son substituídas por "algo" distribuido no espazo arredor dos corpos, ao que podería atribuírse un determinado valor en cada punto. Desta forma o espazo xa non está baleiro, non é unha abstracción matemática, senón que ten características que poden medirse, é un espazo físico.

2. Campos escalares

Consideremos una magnitude escalar tal como a temperatura, presión, etc. Nunha rexión do espazo cada punto toma un valor para esa magnitude; por exemplo, en cada lugar do laboratorio de física hai unha determinada temperatura, de forma que se pode construír unha función matemática que asocie unha temperatura a cada terna de coordenadas (x,y,z). Esta asociación entre o valor dunha magnitude escalar e unas coordenadas espaciais proporciona un campo escalar.

2.1. Definición

Dise que nunha rexión do espazo existe un **campo escalar** cando a cada punto se lle asigna un valor dunha magnitude escalar. Se representamos a magnitude escalar por Ø, é claro que o valor que adopta Ø depende da posición do punto elixido, isto é: Ø = Ø(**r**) = Ø (x,y,z)

2.2. Superficies e liñas equiescalares

Todos aqueles puntos do espazo en que o escalar en cuestión tomo igual valor forman unha superficie coñecida como superficie equiescalar. Se o campo escalar é bidimensional, as superficies quedan reducidas a liñas, como as dun mapa topográfico (curvas de nivel), que unen puntos de igual altura.

Superficie equiescalar é o lugar xeométrico dos puntos que toman o mesmo valor para a magnitude que define o campo escalar.

2.3. Gradiente dun campo escalar

Canto máis próximas estean as superficies equiescalares, máis rapidamente variará o campo. Falar da rapidez coa que varía a función escalar Ø equivale a atopar o cambio que experimenta por unidade de lonxitude, é dicir: $\frac{\Delta\theta}{\Delta\vec{r}}$. Como é doado comprobar, **a máxima rapidez de variación do campo lógrase seguindo un camiño perpendicular ás superficies equiescalares.** Se por un lado escollemos unha dirección $\vec{r}$ que sexa perpendicular ás superficies equiescalares e por outro facemos tender a cero o desprazamento, tense que: $\lim_{\Delta\vec{r}\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta\vec{r}}=\frac{d\theta}{d\vec{r}}$ derivada que mide o cambio infinitesimal de θ nunha dirección moi especial, porque é a que proporciona a maior rapidez de variación. Esta operación ten o nome específico de **gradiente**[1], e admite varias notacións: $\frac{d\theta}{d\vec{r}}=\vec{\nabla}\theta=\vec{grad}\theta$ Fíxate que o gradiente dunha función escalar é unha función vectorial.

2.3.1. Definición matemática

En coordenadas cartesianas o gradiente dun escalar é: $\vec{\nabla}\theta=\frac{\partial\theta}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\vec{k}$ Se traballamos cunha única dimensión, por exemplo a x, o gradiente queda reducido a unha simple derivada multiplicada polo vector unitario correspondente: $\vec{\nabla}\theta=\frac{d\theta}{dx}\vec{i}$

2.3.2. Definición física

Fisicamente, o gradiente indica como varía un escalar coa distancia

2.3.3. Propiedades

As propiedades máis importantes son:

- A súa grandura ("módulo") informa cuantitativamente da variación do campo.
- É perpendicular en cada punto ás superficies equipotenciais e, polo tanto, indica a dirección pola que o campo varía máis rapidamente.
- O seu sentido coincide co do incremento ou aumento do campo.

3. Campos vectoriais

De forma análoga a como definimos un campo escalar, agora tamén é posible asociar un vector a cada punto (x,y,z) do espazo. Esta asociación entre un vector e unha coordenada espacial proporciona un campo vectorial.

3.1. Definición

Dise que nunha rexión do espazo existe un **campo vectorial** cando a cada punto se lle asigna un valor dunha magnitude vectorial.

3.2. Caracterización

Pode denominarse un campo de forzas se a magnitude vectorial utilizada é unha forza. Isto significa que un corpo perturba o espazo que o circunda e que se colocamos outro nas súas proximidades, ao que adoita chamarse *testemuña* ou *partícula de proba*, sobre este aparecerá unha forza, sempre e cando ámbolos dous corpos teñan as mesma propiedades (se é unha carga eléctrica a que crea o campo, a partícula de proba ou partícula testemuña terá que estar cargada electricamente).

[1] Operador diferencial que se representa como $\frac{d}{d\vec{r}}=\vec{\nabla}=\vec{grad}$ e que en coordenadas cartesianas, ven dado pola expresión: $\vec{grad}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ Ao aplicalo a unha función escalar proporciona unha función vectorial.

Debe quedar claro que o campo existe poñamos ou non a partícula de proba, pero só se manifestará se a colocamos. Desta forma, a forza que aparece dependerá do campo e da partícula de proba. Se queremos caracterizar ao campo en cada punto, podemos considerar que a partícula de proba ten de valor a unidade, e a forza obtida desta forma recibe o nome de intensidade de campo.

3.3. Intensidade de campo

Intensidade de campo é a forza que o campo exerce sobre unha partícula de valor unidade na magnitude característica que crea o campo (1 kg se o campo é gravitatorio, 1 C se é electrostático, …).

3.3.1. Liñas de campo

Os campos vectoriais poden representarse mediante **liñas de campo** (tamén chamadas liñas de forza se se trata dun campo en que os vectores son forzas), que son aquelas liñas tanxentes en cada punto á dirección do vector intensidade de campo definido en dito punto.

3.3.2. Propiedades

- A grandura da intensidade de campo é tanto maior canto máis próximas estean entre si as liñas de campo
- A dirección da intensidade de campo é tanxente en cada punto á liña de campo
- O sentido do vector intensidade de campo coincide co sentido da liña de campo
- As liñas de campo non poden cortarse (agás no caso de que o campo fose nulo no punto de corte), posto que isto significaría que a intensidade de campo estaría caracterizada por dous vectores diferentes, situación que non pode darse porque en cada punto o campo só está caracterizado por un vector
- Se nun campo de forzas colocamos un corpo en repouso, o corpo seguirá a traxectoria marcada pola liña de forza que pasa por ese punto.

3.4. Integral de liña dun vector

Temos que estender a noción de integral ás chamadas **integrais de liña** (ás veces tamén son coñecidas polos nomes de **circulación** ou de **integral curvilínea**). A súa característica esencial é que debemos especificar cal é o camiño ou curva C que se sigue desde o límite inferior ao superior. Para representar este tipo de integrais engádese un C ao símbolo habitual: $\int_C \vec{A}d\vec{r}$. Se a curva é pechada (rectángulo, elipse, …) adoita empregarse a notación: $\oint_C \vec{A}d\vec{r}$

3.5. Método para resolver integrais de liña

Podemos seguir o método seguinte:

$$\int_C \vec{A}d\vec{r} = \int_C \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right) = \int_C A_x dx + \int_C A_y dy + \int_C A_z dz$$

Como observas, a circulación de $\vec{A}$ ao longo da curva C descomponse en tres integrais onde os integrandos non teñen por que conter exclusivamente á variable de integración

4. Campos conservativos

Entre o gradiente dun escalar e a integral de liña dun vector pode establecerse unha importante relación:

Se un campo vectorial $\vec{A}$ deriva do gradiente dun campo escalar θ , a integral de liña de $\vec{A}$ non dependerá da traxectoria seguida, senón exclusivamente das posicións inicial e final.

O que o campo $\vec{A}$ derive do gradiente dunha función θ non significa que teñan que ser exactamente iguais. Normalmente tómase a relación: $\vec{A} = -\vec{\nabla}\theta$

Desta forma lembrando que $\vec{\nabla}\theta = \dfrac{d\theta}{d\vec{r}}$, isto é, $\vec{\nabla}\theta d\vec{r} = d\theta$, podemos escribir:

$$\int_{r_i}^{r_f} \vec{A}d\vec{r} = \int_{r_i}^{r_f} -\vec{\nabla}\theta\, d\vec{r} = \int_{r_i}^{r_f} -d\theta = \left[-\theta\right]_{r_i}^{r_f} = \theta\left(\vec{r}_i\right) - \theta\left(\vec{r}_f\right)$$

Onde $\vec{A}$ é a intensidade do campo vectorial e θ é o campo escalar asociado, ao que se lle chama **potencial**.

Resulta evidente que, se o punto inicial e o final coninciden, a circulación será nula. Isto é o que acontece nunha traxectoria pechada.

Cando se verifican as condicións anteriores o campo recibe o nome de **conservativo**. Así pois, dise que un campo é **conservativo** se cumpre algunha das seguintes afirmacións:

- O campo vectorial $\vec{A}$ deriva dun campo escalar (ao que se lle chama *potencial*).
- Toda integral de liña de $\vec{A}$ só depende do punto inicial e do final e non da traxectoria seguida.
- A circulación de $\vec{A}$ ao longo de todo camiño pechado é nula.

Hai que ter en conta que: a) os tres enunciados anteriores son totalmente equivalentes (se un é certo os outros dous sono automaticamente); b) se unha integral de liña non é cero para unha determinada traxectoria pechada, o campo non é conservativo; c) pero se unha integral de liña é cero para unha determinada traxectoria pechada, non se deduce necesariamente que o campo sexa conservativo, pois seguindo outra curva pechada pode non ser nula[2].

Ao igual que un campo conservativo está relacionado cun escalar (o potencial), as liñas de forza e as superficies equiescalares, ás que podemos denominar nesta caso *superficies equipotenciais*, tamén o estarán. Da expresión $\vec{A} = -\vec{\nabla}\theta$ concluimos que **as liñas de campo teñen que ser perpendiculares ás superficies equipotenciais** (e dirixidas no sentido no que o potencial diminúe), xa que $\vec{A}$ obtense a partir dun gradiente e o gradiente ten dirección normal ao campo escalar do que se obtén.

5. Forzas conservativas. Traballo

Centrémonos no caso de que o vector $\vec{A}$ represente a unha forza $\vec{F}$.Consideremos unha partícula de masa *m* que se move ao longo dunha curva C sometida á acción dunha forza $\vec{F}$. Nun intervalo de tempo moi pequeño, infinitesimal, o desprazamento é $d\vec{r}$ e a forza $\vec{F}$ realiza un traballo elemental definido polo producto escalar: $dW = \vec{F}d\vec{r}$. Lembrando como se opera o producto escalar, podemos escribir: $dW = \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{r}\right|\cos\left(\vec{F}, d\vec{r}\right)$

Para calcular o traballo total deberemos sumar os traballos infinitesimais efectuados en todos os despraxzamentos infinitesimais. Iste conquírese mediante a integral de liña, que da lugar á definición máis xeral de traballo:

O traballo que realiza unha forza $\vec{F}$ ao longo dunha curva C é a integral de liña da forza entre o punto inicial e o final: $W = \int_C \vec{F}d\vec{r}$

Se o traballo realizado por $\vec{F}$ non depende da traxectoria seguida, a forza é **conservativa**. Tamén podemos afirmar que unha forza é conservativa se o traballo que realiza ao desprazar o seu punto de aplicación ao longo dunha traxectoria pechada é nulo.

Non tódolas forzas conservativas son doadas de coñecer, pero algunhas adoitan expresións características que nos permiten identificalas inmediatamente como tales. Entre elas destacamos:

- **Forzas uniformes**, aquelas que teñen igual grandura ("módulo"), dirección e sentido en calquera punto do espacio.
- **Forzas centrais**. Unha forza é central cando a súa dirección sempre pasa por un mesmo punto O, que polo xeral adoita escollerse como orixe de coordenadas.

[2] Hai un operador matemático, o rotacional, que nos indicaría con seguridade se o campo é conservativo ou non. Será conservativo cando o rotacional sexa o vector cero.

6. Enerxías Cinética e Potencial

Da definición de traballo que rematamos de ver, é evidente que o cálculo do traballo esixe coñecer a forza que actúa en función da posición; do contrario no sería posible realizar a integral $\int_C \vec{F}d\vec{r}$. Como en ocasións pode suceder que non teñamos acceso a ista información, podemos solventar o problema recurrindo á relación que se establece entre o traballo que efectúa unha forza e a variación que experimenta a enerxía da partícula considerada.

6.1 Teorema da Enerxía Cinética

- Vexamos en primeiro lugar a conexión que existe entre o traballo e a variación da enerxía cinética. É o que chamaremos *teorema da enerxía cinética.*

Consideremos unha masa m sometida a unha forza $\vec{F}$, de modo que se traslada desde o punto inicial A ata outro B. O traballo é:

$W_A^B = A\int^B \vec{F}d\vec{r} = \int_A^B m\vec{a}d\vec{r} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = \int_A^B m\vec{v}d\vec{v}$, se a masa permanece constante, temos:

$W_A^B = \int_A^B m\vec{v}d\vec{v} = m\int_A^B \vec{v}d\vec{v} = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_A^B = \frac{1}{2}mv_B{}^2 - \frac{1}{2}mv_A{}^2$. Como sabes o termo $\frac{1}{2}mv^2$ recibe o nome de enerxía cinética, E_C, dunha partícula de masa *m*. Polo tanto:

$W_A^B = E_C(B) - E_C(A) = \Delta E_C$ O resultado ao que chegamos coñécese como **teorema da enerxía cinética**: o traballo que realiza unha forza(calquera tipo de forza, conservativa ou non) é igual á variación da enerxía cinética da partícula sobre a que actúa.

6.2 Teorema da Enerxía Potencial

- No caso de que as forzas que actúen sobre unha partícula sexan conservativas, pode introducirse unha nova enerxía: **a enerxía potencial.**

Xa sabes que un campo conservativo $\vec{A}$ ten que derivar dun campo escalar θ. Ademáis, a integral curvilínea de $\vec{A}$ só depende entón da variación que ten ϑ entre a posición inicial e a final. Da mesma forma que á intensidade de campo se lle asocia un potencial, unha forza conservativa terá que derivar dun escalar, ao que se lle chama **enerxía potencial**, E_P

Aquí tamén, normalmente, faise coincidir a forza co oposto do gradiente da enerxía potencial:

$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_P$ Se combinamos a definición de traballo coa anterior temos:

$W_a^B = \int_A^B \vec{F}d\vec{r} = \int_A^B -\vec{\nabla} E_P d\vec{r} = \int_A^B -dE_P = [-E_P]_A^B = E_P(A) - E_P(B)$ Este é o chamado teorema da enerxía potencial: o traballo realizado por unha forza conservativa sobre un corpo que se traslada desde un punto inicial a outro final é igual á diferencia entre a enerxía potencial no punto inicial e a enerxía potencial no punto final.

6.3 Diferencias entre os dous teoremas

As diferencias entre estes dous teoremas son:

- No teorema da enerxía potencial o traballa ten que ser realizado só por forzas conservativas, mentras que no da enerxía cinética non se impón isa restricción.
- No teorema da enerxía potencial, o minuendo é a inicial e o sustraendo a final, mentras que no da enerxía cinética opérase ao revés, a final menos a inicial.

7. Conservación da Enerxía Mecánica

A **enerxía mecánica** E_M dun corpo defínese como a suma das súas enerxías cinética e potencial. O **teorema de conservación da enerxía mecánica** afirma que se as forzas que están aplicadas sobre unha partícula son todas conservativas, a enerxía mecánica permanece constante.

Vexamos:

$W^B_A = E_C(B)-E_C(A)$

$W^B_A = E_P(A)-E_P(B)$

$$E_C(B)-E_C(A)=E_P(A)-E_P(B)$$

$E_C(B)-E_P(B)=E_C(A)-E_P(A)$ e posto que a suma da enerxía cinética e a potencial é a enerxía mecánica:

$$E_M(B)=E_M(A)$$

Como vemos a enerxía mecánica dunha partícula permanece constante cando está sometida a forzas conservativas.

7.1. Forzas non conservativas

Se as forzas que actúan sobre unha partícula **non** son todas conservativas o procedemento a seguir é o seguinte: descompoñer o traballo como suma do realizado polas forzas de tipo conservativo e do realizado polas que non o son:

$W = W_C + W_{NC}$ (I)

Como o teorema da enerxía cinética asegura que: $W = E_{C\ final} – E_{C\ inicial}$

e o teorema da enerxía potencial: $W_C = E_{P\ inicial} - E_{P\ final}$ (observase que o W é o realizado só polas forzas non conservativas)

Se substituimos na expresión (I) queda: $E_{cf} – E_{ci} = E_{pi} – E_{pf} + W_{NC}$

se reordenamos queda: $E_{cf} – E_{Pf} = E_{Ci} – E_{pi} + W_{NC}$, entón:

$$E_{M\ final} = E_{M\ inicial} + W_{NC}$$

É dicir, a enerxía mecánica final é igual á inicial máis o traballo realizado polas forzas non conservativas.

- Se as forzas non conservativas son disipativas, como as forzas de rozamento, o traballo é negativo, posto que se opoñen ao movemento e a enerxía mecánica da partícula disminúe.
- Cando as forzas non conservativas actúen, máis ou menos, eficazmente, ao favor do movemento, o traballo será positivo e con elo a enerxía mecánica aumenta.

Con todo hai que percatarse de que a enerxía mecánica nin desaparece no primeiro caso[3] nin se crea no segundo[4].

Sempre, nun sistema illado (aquel que non intercambia nin masa nin enerxía co exterior) o balance enerxético total debe ser nulo.

[3]A enerxía mecánica dunha partícula pode diminuir porque, total ou parcialmente, se transforme en calor por efecto do rozamento.

[4]Pola contra, a enerxía mecánica pode incrementarse porque a enerxía acumulada nun corpo se libere en forma de estoupido, aumentando subitamente a enerxía cinética dos fragmentos que se xeneraron.