XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN
E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA
CPI "A Xunqueira"
Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

Caderno de traballo

Proxecto EDA 2009 Descartes na aula

Departamento de Matemáticas CPI A Xunqueira – Fene

Nome:	4º ESO	Nº

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

FIGURAS SEMELLANTES

1. CONCEPTO DE SEMELLANZA

Intuitivamente: Dúas figuras son **SEMELLANTES** se teñen a mesma forma pero distinto tamaño.

Observa a seguinte escena Descartes: O cuadrilátero ABCD é fixo, mentres que o A´B´C´D´ pode cambiar de forma estirando calquera dos seus vértices co el rato. Adica un tempo a cambiar a forma do segundo cuadrilátero e a comprender os valores que calcula a escena; despois pasa ás actividades que se che propoñen mais adiante.

1.1- Intenta que o cuadrilátero vermello sexa semellante ó azul pero dun tamaño:

a) dobre b) triplo

c) metade d) vez e media

CRITERIO DE SEMELLANZA ENTRE DOUS POLÍGONOS: Para que dous polígonos (co mesmo número de lados) sexan semellantes téñense que cumprir as dúas condicións seguintes:

1. Os ángulos respectivos teñen que ser iguais:

   A = A´ ; B = B´ ; C = C´ ; ...

2. Os lados respectivos teñen que ser proporcionais:

   AB / A´B´ = BC / B´C´ = CD / C´D´ = ... = constante

Os vértices, lados e ángulos correspondentes a dous polígonos semellantes chámanse **homólogo**s; a constante de proporcionalidade (que aparece sempre que se dividen as lonxitudes de dous lados homólogos) chámase r**azón de semellanza**.

1.2- Contesta no teu caderno:

a) Cal é a razón de semellanza en cada un dos apartados da actividade 1?

b) Dous triángulos son semellantes e a razón de semellanza é 5. Se os lados dun dos triángulos miden 6, 11 e 15 cm, Canto miden os lados do outro triángulo? Que podes dicir dos ángulos dos dous triángulos?

1.3 -Vexamos que, en xeral, se só se cumpre unha dos dous criterios anteriores os polígonos resultantes poden non ser semellantes:

a) No teu caderno debuxa un cadrado e un rombo (que non sexa un cadrado ou dito doutra forma, que non teña ángulos rectos), ambos os dous de 5 cm de lado. Aínda que os seus ángulos homólogos non son iguais, os lados homólogos son proporcionais (cal é a razón de semellanza?) Parécenche semellantes? Deduce a conclusión.

b) Pensa agora en dous cuadriláteros con ángulos homólogos iguais e que non obstante non sexan semellantes por non ter os seus lados homólogos proporcionais. Debúxaos no teu caderno e escribe a conclusión. *(Pista: os dous cuadriláteros poden ter todos os seus ángulos rectos)*

2. PROCEDEMENTO PARA A CONSTRUCIÓN DE FIGURAS SEMELLANTES.

Vexamos un procedemento sinxelo para construír figuras semellantes.

Na seguinte escena Descartes podes ver o pentágono A´B´C´D´E´semellante ó ABCDE e construído a partir del con axuda dun punto P calquera e do feixe de cinco rectas que con centro en P pasan polos vértices do pentágono ABCDE

Observa que tal e como se encontra a escena nun principio (se a tes cambiado, pulsa no botón 'Inicio' na parte inferior esquerda da escena), os puntos A', B', C'... obtéñense de forma que:

$$PA' = 2 \cdot PA \;;\; PB' = 2 \cdot PB \;;\; PC' = 2 \cdot PC \ldots$$

2.1-

a) Con axuda das frechiñas, modifica a razón de semellanza. Séguese mantendo a semellanza entre os dous pentágonos?

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

b) Que pasa cando a razón de semellanza é maior que 1? E cando é menor que 1? E cando exactamente igual a 1? Escribe as túas respostas no caderno.

c) Fíxate que en todos os casos os lados homólogos son paralelos, o que indica que os ángulos homólogos son iguais. Cando dúas figuras semellantes presentan os seus lados homólogos paralelos dise que están en posición de Thales.

2.2- O punto P pode cambiarse, arrastrándoo co punteiro do rato. Proba diferentes posicións relativas do punto P respecto do pentágono ABCDE:

a) Exterior b) Interior c) Nun vértice.

2.3- No teu caderno describe con precisión o método de construción de polígonos semellantes. Exemplifícao co debuxo de tres exemplos, un por cada unha das posicións relativas de P tratadas na actividade anterior.

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

TEOREMA DE TALES

3. O TEOREMA DE TALES

Teorema de Tales: Cando dúas rectas secantes son cortadas por unha serie de rectas paralelas, os segmentos determinados nunha das rectas son proporcionais aos segmentos correspondentes da outra recta.

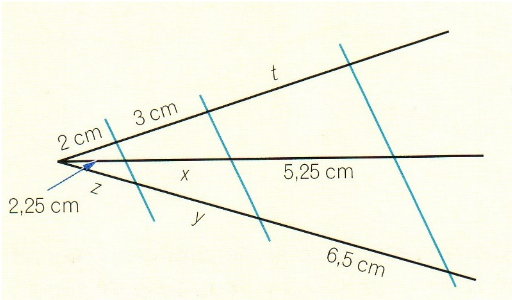
3.1- No debuxa unha escena similar á anterior *(emprega toda a páxina; canto maior sexa o debuxo mellores resultados obterás)*. Cunha regra mide coidadosamente os segmentos determinados nas dúas rectas e calcula as súas razóns. Séguese verificando o teorema de Tales? Razoa a túa resposta.

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

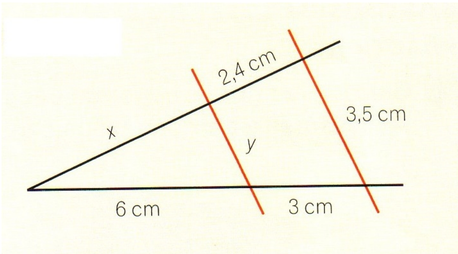
Teorema de Tales *(segundo enunciado)*: Cando dúas rectas secantes son cortadas por unha serie de paralelas, a razón entre dous segmentos dunha das rectas é igual á razón entre os segmentos correspondentes da outra recta.

3.2- Cantas proporcións similares ás anteriores podes escribir? Compróbaas todas no debuxo feito no teu caderno.

3.3- Calcula as distancias descoñecidas



3.4- Indica as distancias que faltan



Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

4. USO DO TEOREMA DE TALES NO ESTUDO DOS TRIÁNGULOS.

Toda paralela a un dos lados dun triángulo determina cos outros dous lados un novo triángulo, cuxos lados son proporcionais aos do primeiro

4.1- Esta relación entre os lados de ambos os dous triángulos é unha consecuencia do teorema de Tales. En efecto:

a) Pulsa el botón 'Inicio' para volver a escena ó principio. Aplicando o teorema de Tales dende o vértice A obtemos: AB'/AB = AC'/AC

b) Co rato arrastra o punto B' ata facelo coincidir co punto B. Se agora volvemos a aplicar o teorema de Tales dende o vértice B obtemos: AB'/AB = B'C'/BC

c) Como as dúas proporcións anteriores coinciden no primeiro membro, obtemos o resultado buscado: AB'/AB = AC'/AC = B'C'/BC

4.2- Volvamos o inicio da escena (botón 'Inicio').

Os ángulos correspondentes de ambos triángulos son iguais. Podes xustificar esta afirmación?

Resumindo as conclusión das actividades 4.1 e 4.1 temos que:

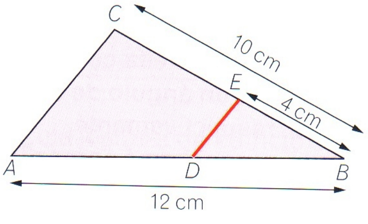
Toda paralela a un lado dun triángulo ABC determina cos outros dous lados un novo triángulo AB'C' e cúmprense as dúas condicións seguintes:

1. Seus lados respectivos son proporcionais.
2. Seus ángulos respectivos son iguais.

Como estas son as condicións que teñen que cumprir dous polígonos para ser semellantes, podemos concluír que:

Toda paralela a un lado de un triángulo determina cos outros dous lados un novo triángulo **SEMELLANTE** ao primeiro.

4.3- Canto mide DB? Pódese determinar DE?



Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

CRITERIOS DE SEMELLANZA DOS TRIÁNGULOS

5. TRIÁNGULOS SEMELLANTES

Dous triángulos son **semellantes** se os seus á**ngulos** son, respectivamente, **iguais** e seus **lados homólogos** son **proporcionais**.

Para determinar se dous triángulos dados son semellantes abondaría con comprobar se verifican estas condicións. Pero existen algúns principios que nos permiten determinar se dous triángulos son semellantes sen necesidade de medir e comparar todos os seus lados e todos os seus ángulos. Estes principios coñécense co nome de casos de semellanza de triángulos, ou tamén, **criterios de semellanza de triángulos**

6. PRIMEIRO CRITERIO DE SEMELLANZA DE TRIÁNGULOS

Dous triángulos cos **ángulos iguais** son **semellantes**.

A partir deste triángulo podes obter triángulos semellantes ao orixinal arrastrando o punto C ou xogando cos valores da escala. Observa que a medida dos ángulos, a pesar de todo, permanece constante.

Observa a seguinte escena. Temos dous triángulos situados nunha posición un pouco especial. Os matemáticos adoitan dicir que eses triángulos están en **posición de Tales,** en honor do sabio grego Thales de Mileto.

6.1- Compara o triángulo maior, BDE ,co máis pequeno formado no seu interior, ABC. Indica o valor de cada uno dos ángulos. Podemos dicir que son iguais dous a dous?

A =	E =
B =	B =
C =	D =

6.2- Sabemos que os ángulos de un triángulo SUMAN necesariamente 180º.

Se temos dous triángulos que teñen dous dos seus ángulos iguais, como será o terceiro ángulo? Son semellantes estes triángulos? Por que?

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

Chámanse triángulos equiláteros aos triángulos que teñen os seus tres lados iguais e os seus tres ángulos iguais

6.3- Se temos dous triángulos equiláteros de diferente tamaño, como serán seus ángulos?

6.4- Son semellantes estes triángulos? Por que?

7. SEGUNDO CRITERIO DE SEMELLANZA DE TRIÁNGULOS

Dous triángulos cos **lados proporcionais** son **semellante**s.

O cociente obtido o comparar os lados homólogos entre si recibe o nome de **razón de semellanza**

7.1.-Os lados de dous triángulos miden, respectivamente, 8, 10 e 12 cm (os do primeiro) e 52, 65 e 78 cm (os do segundo). Comproba que son semellantes e calcula a razón de semellanza.

7.2- Temos un triángulo cuxos lados miden 3 cm, 4 cm e 5 cm respectivamente e desexamos facer unha ampliación a escala 3:1. Canto medirá cada lado?.Cal é a razón de semellanza?.

7.3- Descobre se son semellantes os triángulos da escena adxunta e en caso afirmativo determina súa razón de semellanza. Repite o exercicio varias veces movendo os controis.

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

8.- TERCEIRO CRITERIO DE SEMELLANZA DE TRIÁNGULOS

Dous triángulos con dous lados proporcionais e o ángulo comprendido entre eles igual, son semellantes

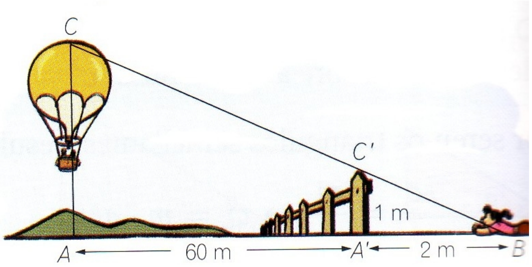
8.1- De novo tes aquí dous triángulos en posición de Tales. Como podes comprobar, o ángulo B é común a ambos os dous triángulos e os lados que o forman son proporcionais entre si.

8.2- Un poste vertical de 3 metros proxecta unha sombra de 2 metros; que altura ten unha árbore que á mesma hora proxecta unha sombra de 4,5 metros? (Fai un debuxo do problema).

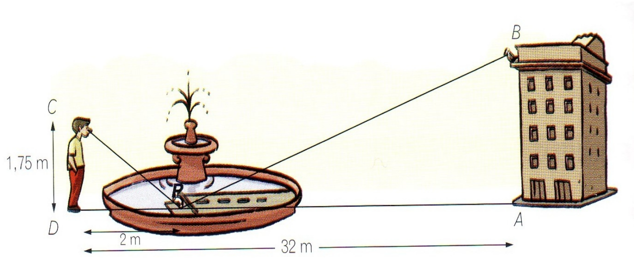
8.3- Os lados dun triángulo miden 30, 40 e 50 centímetros respectivamente. Os lados dun segundo triángulo miden 12, 16 e 20 centímetros. Son semellantes?. En caso afirmativo, cal é a razón de semellanza?.

8.4-Como ti mesmo podes comprobar, estes dous triángulos son semellantes. Os lados c-f e a-d, son proporcionais entre si. Os ángulos que comprenden, B e E, miden 90º cada un deles. Acha a razón de semellanza e as dimensións dos lados que faltan.

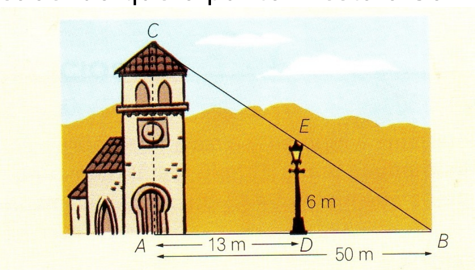
8.5- Calcula a que altura se atopa este globo.



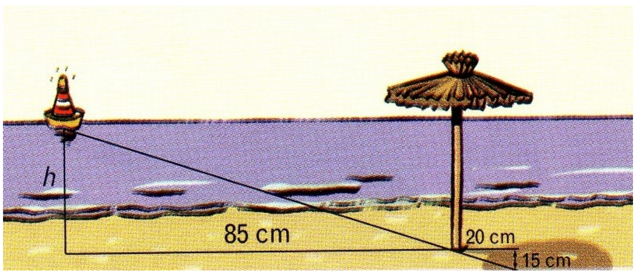
8.6- Calcula a que altura se encontra a pomba se Xurxo mide 1,75 m, está a unha distancia de 2m da fonte e de 32 m do edificio.



8.7- Calcula a altura da torre se a farola mide 6m e está a unha distancia de 13 m da torre, sabendo que o punto B está a 50 m da base da torre.



8.8- Que distancia hai da boia á praia?



Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

TEOREMAS DA ALTURA E DO CATETO

9. PROXECCIÓNS

Dado un punto **P** e unha recta **r,** chámase **proxección do punto P** sobre a recta r ao punto **P',** pé da perpendicular trazada dende P a r. Proxección do segmento **AB** é o segmento **A'B'** cuxos extremos son as proxeccións dos extremos **A** e **B**.

9.1- Calcula o tamaño da proxección dun segmento de tamaño 5 sobre a recta da figura, cando é perpendicular a ela e cando é paralela. Depende a proxección da distancia á recta?

10. TEOREMA DA ALTURA

Enunciado 1: Nun triángulo rectángulo, a altura trazada sobre a hipotenusa é media proporcional entre as dúas partes en que divide esta.

No triángulo rectángulo da escena **ABC** trazouse a altura **AD** sobre a hipotenusa **BC**, cumpríndose para calquera triángulo rectángulo a igualdade:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$$

10.1-Move o punto de control A e observa como varían os valores dos segmentos AD, BD e DC pero mantéñense iguais entre si, os cocientes BD/AD e AD/DC.

10.2- Modifica o valor da hipotenusa e move o punto A para que apareza o triángulo rectángulo.

10.3- Debuxa un triángulo rectángulo de lados 10, 8 e 6, traza a altura sobre a hipotenusa e comproba que se cumpre o teorema da altura. Contrasta os valores cos da escena Descartes.

Enunciado 2: O cadrado da altura sobre a hipotenusa é igual ó produto das proxeccións dos catetos sobre ela

$$h^2 = c' \cdot b'$$

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

11. TEOREMA DO CATETO

Enunciado 1: Nun triángulo rectángulo cada cateto é media proporcional entre a hipotenusa e a súa proxección sobre ela.

Como no caso anterior, a altura trazada sobre a hipotenusa divide o triángulo noutros dous semellantes e cúmprense as igualdades seguintes:

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{c'} \qquad \frac{a}{b}=\frac{b}{b'}$$

11.1- Se a altura sobre a hipotenusa dun triángulo rectángulo divide esta en dous segmentos de medidas 7 e 4, aplica o teorema do cateto para achar os valores de cada un dos catetos.

11.2- Comproba na escena os valores calculados.

11.3- Acha a área do devandito triángulo.

Enunciado 2: Nun triángulo rectángulo o cadrado dun cateto é igual ó produto da hipotenusa e a súa proxección sobre ela.

$$c^2 = c' \, . \, a$$
$$b^2 = b' \, . \, a$$

11.4- Nun triángulo rectángulo os dous segmentos en que a hipotenusa queda dividida pola altura miden 6 cm e 4 cm. Calcula a altura e os catetos. Fai o debuxo do triángulo.

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

SEMELLANZA EN ÁREAS E VOLUMES

12.RELACIÓN ENTRE AS ÁREAS DE FIGURAS SEMELLANTES.

Xa sabemos a relación que existe entre as lonxitudes dos segmentos asociados nas figuras semellantes. A razón ou cociente desas lonxitudes sempre é a mesma, é constante e chámase **Razón de Semellanza**.

Que relación existirá entre as áreas o superficies destas figuras?. Se unha figura é o dobre de grande ca outra (r =2), súa superficie tamén será o dobre?

A seguinte escena aclara a situación

12.1- Son semellantes as dúas figuras da escena? Por que?

12.2- Dálle o valor 2 á razón de semellanza, r. Que significa que a razón de semellanza entre as dúas figuras sexa 2?

12.3-Cando r=2, cal é a razón entre as áreas das dúas figuras?

12.4- E se r=3? e se r=4?

12.5- Sorpréndeche o resultado? Por que?

12.6- Intenta deducir unha fórmula que nos de a relación que temos entre as áreas de dúas figuras semellantes.

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

13. RELACIÓN ENTRE VOLUMES DE FIGURAS SEMELLANTES

Que relación existirá entre os volumes destas figuras? Se unha figura é o dobre de grande ca outra (r =2), Seu volume tamén será o dobre?. A seguinte escena aclara a situación.

13.1- Son semellantes as dúas figuras da escena? Por que?

13.2- Como se calcula o volume dun cubo coñecendo a lonxitude da súa aresta? Calcula os volumes dun cubo de 10 cm de aresta e outro de 30 cm, e comproba na escena que os resultados que obtiveches son correctos.

13.3- Repite os cálculos con outros valores para a lonxitude da aresta.

13.4- Se un cubo é o dobre de ancho que outro, ou o dobre de alto, que relación haberá entre os seus volumes? Será tamén o dobre?

13.5- Se un cubo é o triplo de ancho que outro, ou o triplo de alto, que relación haberá entre os seus volumes? Será tamén o triplo?

13.6- Que relación hai pois entre os volumes de figuras semellantes?

13.7- O mineiro que serviu de modelo para facer a estatua da foto medía 1,80 cm e pesaba 85 kgr. Supoñamos que a estatua - que ten 3m de altura- non fose de pedra senón real (de carne e óso como o modelo orixinal),canto pesaría este home xigante?

13.8- A Carlos regaláronlle unha maqueta dun barco a escala 1:100.

a) Se o barco real despraza 3.671 toneladas de auga, canto desprazaría a maqueta?
b) Se a superficie real mide 3.153 m^2, canto mide a superficie das velas da maqueta?

13.9- As dimensións dun campo de fútbol son 70 e 100 m respectivamente. Cal é a superficie dun futbolín feito a escala 1:75?

13.10- "A un mozo le dijo un labrador: ¿cuánto queréis por los espárragos que pudiere atar en esta cuerda de un palmo de largo? Se concertaron por medio real. Y el mozo sacó otra cuerda de 2 palmos de largo y dijo: dádmela de espárragos, y pagaros he un real. Pido si en esta compra se ha hecho algún agravio."*

* Este problema o propuxoó en 1562 un ilustre matemático da provincia de Jaén: o Bachiller Pérez de Moya .

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

CURIOSIDADES

14. PIZZERÍA DESCARTES: O SECRETO NON ESTÁ NA MASA, ESTÁ NO ÁREA.

Todos temos comido algunha vez na ***"Pizzería Descartes"***; son de cine súas pizzas de ***"105 queixos"*** e especialmente a ***"mariñeira extra-super"***, que a serven con barco e todo. Sen embargo, temos algo que chama a nosa atención na táboa de prezos:

Tipo	**Pequena** *15 cm de diámetro*	**Mediana** *30 cm de diámetro*	**Grande** *45 cm de diámetro*
Prezo	2'34 €	9'36 €	21,06 €

A pizza mediana é o dobre de ancha que a pequena, por que non custa o dobre?. A pizza grande é o triplo de ancha que a pequena, por que non custa o triplo?

14.1- Son semellantes as dúas figuras da escena? Por que?

14.2- Como se calcula a superficie dun círculo coñecendo seu diámetro? Calcula as superficies de pizzas de 10, 20, 30 e 40 cm de diámetro e comproba na escena que os resultados que obtiveches son correctos.

14.3- Calcula o prezo por cm2 na pizza da esquerda. Fai o mesmo ca pizza da dereita. Coinciden? É lóxico?

14.4- Se a pizza de 30 cm. é o dobre de ancha que a de 15 cm, que relación terán súas áreas? Razoa a resposta. Polo tanto, que relación terán seus prezos?

15. PODEN EXISTIR HOMES XIGANTES?.

GULLIVER EN LILIPUT

Gulliver, tras un naufraxio, aparece nas costas de Liliput. A escala de todas as cousas é dunha pulgada a un pé: polo tanto, Gulliver é 12 veces máis alto que os habitantes do país. É un xigante nese país.

A resistencia á rotura dunha corda, arame, columna, o dos ósos das pernas, é proporcional á superficie de súa sección recta. Tal e como describe Jonathan Swift, Gulliver e os liliputienses teñen a mesma constitución, aínda que distintos tamaños: son semellantes. A razón de semellanza sería:

$$r = \frac{\text{Altura de Gulliver}}{\text{Altura media de un liliputiense}} = 12$$

Como dixemos que a resistencia dos ósos das pernas é proporcional o área de súa sección plana, e tendo en conta a relación existente entre as áreas de figuras semellantes, a relación entre as resistencias dos ósos será:

$$\frac{\text{Área sección plana de los huesos de Gulliver}}{\text{Área sección plana de los huesos de un liliputiense}} = r^2 = 12^2 = 144$$

Polo tanto, as pernas de Gulliver serán 144 veces máis resistentes que as dun liliputiense medio (que non é o mesmo que medio liliputiense, non?).

Estudemos agora a relación que existe entre os pesos. Como Gulliver é semellante a os habitantes de Liliput, a relación entre os volumes, e polo tanto entre as masas, será o cubo da razón de semellanza:

$$\frac{\text{Peso de Gulliver}}{\text{Peso de un liliputiense}} = r^3 = 12^3 = 1728$$

Gulliver pesa 1728 veces máis que un liliputiense medio, pero seus ósos solo son 144 veces máis resistentes que a dos habitantes de Liliput. É dicir, o peso do xigante aumentou doce veces máis que a resistencia dos seus ósos. Para camiñar, tería que facer un esforzo similar ó dunha persoa normal de Liliput ¡que levara 11 persoas máis sobre seus ombros!

Se existisen os homes xigantes, estes acabarían esmagados polo seu propio peso

SISTEMAS DE MEDIDA DE ÁNGULOS

1. SISTEMA SESAXESIMAL

A unidade neste sistema é o **grao sesaxesimal** (º) que é o que mide cada unha das 360 partes nas que se divide o ángulo completo.

Ten dous divisores: **minutos** (') e **segundos** (")

60'= 1º

60"= 1'   3600" =1º

1.1- Modifica os valores de A

1.2- Observa que o ángulo vaise debuxando, dende 0º ata o ángulo completo de 360º.

1.3- Debuxa varios deste ángulos indicando seu valor.

2. RADIÁNS

A unidade é o **radián** (rad), que é a medida dun ángulo central tal que o seu arco ten a mesma lonxitude co raio da circunferencia.

2.1- Modifica os valores de A

2.2- Observa que o ángulo vaise debuxando, dende 0 rad ata o ángulo completo de 2π.

2.3- Debuxa varios deste ángulos indicando seu valor.

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

3. EQUIVALENCIA ENTRE GRAOS E RADIÁNS

O ángulo completo son **360º** e **2π radiáns**

3.1- Escribe un ángulo en graos e observa a súa equivalencia en radiáns. Anota aquí algúns resultados.

3.2- Escribe un ángulo en radiáns e observa a súa equivalencia en graos. Anota aquí algúns resultados.

3.3- Escribe en radiáns: 60º, 45º, 90º, 180º e comproba a solución.

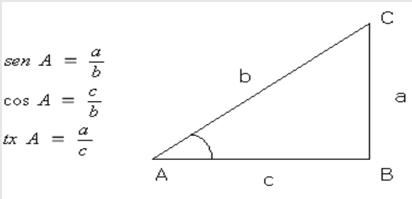
3.4- Escribe en graos: **π**/2 rad, 3**π**/2 rad, 1,5 rad, 2 rad e comproba a solución.

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS DE ÁNGULOS AGUDOS

4. RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS NUN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

As razóns trigonométricas dun ángulo agudo defínense en función dos lados dun triángulo rectángulo e son independentes do triángulo elixido.

Ángulo **B**=90º, **b** é a hipotenusa, **a** e **c** son os catetos



Imos comprobar que as razóns non dependen da lonxitude dos lados do triángulo.

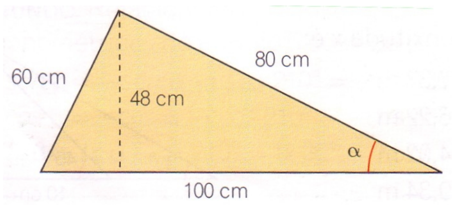
4.1- Varía os valores de b ata que alcance unha lonxitude de 8.

4.2- Observa como non varía o valor das razóns trigonométricas do ángulo de 30º que aparece na figura. Cambia a 45º e 60º.

4.3- Calcula as razóns trigonométricas dos ángulos de 15º, 1 radián, 85º y 0.3 radiáns.

4.4-Proba a construír un triángulo rectángulo de lados 3, 4 e 5. Que valor toma o ángulo A?

4.5.- Dado o seguinte triángulo rectángulo, calcula as razóns trigonométricas do ángulo marcado, utilizando os triángulos maior e menor. Obtense o mesmo resultado? Razóao.



Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

5. UN TRIÁNGULO DE HIPOTENUSA UNIDADE

Como o valor das razóns trigonométricas nun triángulo rectángulo non depende do tamaño dos lados, pode elixirse un triángulo coa hipotenusa **b=1**. Neste caso os cálculos simplifícanse, de xeito que o cateto oposto ó ángulo é igual ó **seno** e o contiguo ó **coseno**.

5.1- Repite o cálculo das razóns trigonométricas de los ángulos de 15º, 45º, 60º, 1 radián, 85º e 0.3 radiáns.

5.2- Atopas algunha relación entre as tres razóns trigonométricas? Intenta escribir unha fórmula que as relacione. *(Pista: utiliza o Teorema de Pitágoras nese triángulo de hipotenusa unidade)*

5.3- Calcula o valor do ángulo A nos casos nos que: sen A=0.5, cos A=0.75 e tx A=2.75

RELACIÓN ENTRE AS RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS

6. RELACIÓN FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRÍA

No triángulo rectángulo de hipotenusa unidade, cada cateto é unha das razóns trigonométricas, polo tanto, se aplicamos o teorema de Pitágoras obtemos a chamada **relación fundamental da trigonometría**:

$$sen^2 A + \cos^2 A = 1$$

6.1- Comproba para diferentes valores do ángulo A que cúmprese o teorema de Pitágoras.

6.2- Se o seno de un ángulo es 1/3 calcula o valor do coseno

6.3- Calcula o valor do seno se o coseno dun ángulo é $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. RELACIÓN ENTRE A TANXENTE, O SENO E O COSENO

No triángulo rectángulo de hipotenusa unidade, o cateto oposto é o seno e o cateto contiguo o coseno, polo tanto a tanxente é o cociente entre ambos

$$tx\ A = \frac{sen\ A}{\cos\ A}$$

7.1- Se coñeces o cos A=0.5, calcula as outras razóns trigonométricas do ángulo A

7.2- Se coñeces o sen A=0.391 calcula as outras razóns trigonométricas do ángulo A

7.3- Pódese calcular o valor do seno e do coseno cando a tanxente do ángulo vale 1?

7.4- Calcula o resto de razóns trigonométricas utilizando as relacións entre elas:

a) sen $\boldsymbol{\alpha}$= 0,3

b) sen $\boldsymbol{\beta}$ =0

c) cos $\boldsymbol{\gamma}$ = 0,4

d) tx $\boldsymbol{\delta}$ = 2

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS DUN ÁNGULO CALQUERA

8. CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA

Chámase circunferencia **goniométrica** ou trigonométrica a aquela que ten o seu centro na orixe de coordenadas e o seu raio mide 1 unidade; polo tanto corta os eixes nos puntos (1,0), (0,1), (-1,0) e (0,-1). Utilízase moito na trigonometría porque permítenos debuxar mediante un segmento as razóns trigonométricas, como veremos de seguido.

Os ángulos debuxámolos comezando na parte positiva do eixo OX e xirando no sentido contrario o das agullas do reloxo (sentido de xiro positivo)

9. SENO

Nesta escena estudaremos a razón seno. Tendo en conta a definición do seno:

sen A = cateto oposto/ hipotenusa e que pola construción a hipotenusa vale 1

seno A = cateto oposto.

9.1- Modifica o valor do ángulo A e observa como cambia o valor do seno.

9.2- Comproba que para calquera valor de A temos que sen A = sen(A+2kπ), sendo k un número enteiro. Anota aquí algunha das observacións.

9.3- Está acotado o valor do seno dun ángulo A? Razoa a resposta.

9.4- Indica en que cuadrantes o seno toma valores positivos e en cales negativos.

9.5- Para que valores sen A = 0?

10. COSENO

Nesta escena estudaremos a razón coseno. Tendo en conta a definición do coseno:

cos A = cateto contiguo/ hipotenusa e que pola construción a hipotenusa vale 1

cos A = cateto oposto.

10.1- Modifica o valor do ángulo A e observa como cambia o valor do coseno

10.2- Comproba que para calquera valor de A temos que cos A = cos(A+2kπ), sendo k un número enteiro. Anota aquí algunha das observacións.

10.3- Está acotado o valor do coseno dun ángulo A? Razoa a resposta.

10.4- Indica en que cuadrantes o coseno toma valores positivos e en cales negativos.

10.5- Para que valores cos A = 0?

10.6- Razoa en que cuadrante está cada ángulo:

a) sen α= 0,3

   cos α= -0,6

b) sen β = -0,8

   sen β = -0,6

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

11. TANXENTE

Nesta escena estudaremos a razón tanxente. Tendo en conta a definición da tanxente

tx A = cateto oposto/ cateto contiguo

11.1-Modifica o valor do ángulo A e observa como cambia o valor da tanxente.

Así como o seno e o coseno poden calcularse para tódolos ángulos, non ocorre o mesmo coa tanxente: non existe tx(p/2+ kp), sendo k un número enteiro.

11.2-Comproba que para calquera valor de A temos que tx A = tx (A+kπ), sendo k un número enteiro. Anota aquí algunha das observacións.

11.3-Está acotado o valor da tanxente dun ángulo A? Razoa a resposta.

11.4-Indica en que cuadrantes a tanxente toma valores positivos e en cales negativo.

11.5- Calcula as razóns trigonométricas que faltan

a) cos α= -1/3, para 180º < $\alpha < 270^{\circ}$

b) sen β = 0,8, para 90º < β < 180º

c) sen γ = -2/5, para 270º < γ < 360º

REDUCCIÓN A ÁNGULOS DO PRIMEIRO CUADRANTE

12. ÁNGULOS DO SEGUNDO CUADRANTE

Na seguinte escena pode verse o **ángulo B** do 2º cuadrante (en vermello) e o **ángulo A**, do 1º cuadrante ,relacionado co B (en verde).

12.1- Modifica el valor do ángulo A e observa como cambia o valor do ángulo B co que está relacionado: **B= 90º+A**

12.2- Con que razón de A coincide o seno do ángulo B?. E o coseno?.

12.3- Atopa a relación entre as tanxentes dos ángulos A e B.

12.4- Calcula as razóns trigonométricas dos seguintes ángulos, tendo en conta que

cos 50º = 0,6428 e **sen 40º = 0,6427** :

a) 140º

b) 130º

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

13. ÁNGULOS DO TERCEIRO CUADRANTE

Na seguinte escena pode verse o **ángulo B** do 3º cuadrante (en vermello) e o **ángulo A**, do 1º cuadrante ,relacionado co B (en verde).

13.1- Modifica el valor do ángulo A e observa como cambia o valor do ángulo B co que está relacionado: **B= 180º+A**.

13.2- Con que razón de A coincide o seno do ángulo B?. E o coseno?

13.3- Atopa a relación entre as tanxentes dos ángulos A e B

13.4- Calcula as razóns trigonométricas dos seguintes ángulos, tendo en conta que

cos 50º = 0,6428 e **sen 40º = 0,6427** :

a) 230º

b) 220º

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

14. ÁNGULOS DO CUARTO CUADRANTE

Na seguinte escena pode verse o **ángulo B** do 3º cuadrante (en vermello) e o **ángulo A**, do 1º cuadrante ,relacionado co B (en verde).

14.1- Modifica o valor do ángulo A e observa como cambia o valor do ángulo B co que está relacionado: **B= 270º+A**.

14.2- Con que razón de A coincide o seno do ángulo B?. E o coseno?.

14.3- Atopa a relación entre as tanxentes dos ángulos A e B

14.4- Calcula as razóns trigonométricas dos seguintes ángulos, tendo en conta que

cos 50º = 0,6428 e **sen 40º = 0,6427** :

a) 310º

b) 320º

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS, SUPLEMENTARIOS E OPOSTOS

15. ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Os ángulos **complementarios** son os que suman 90º. Na seguinte escena pode verse o **ángulo A** (en verde) e o seu **complementario B** (en vermello).

15.1- Modifica o valor do ángulo A e observa como cambia o valor do seu complementario. o ángulo B **B= 90º-A**.

15.2- Con que razón de A coincide o seno do ángulo B?. E o coseno?.

15.3- Atopa a relación entre as tanxentes dos ángulos A e B

16. ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Os ángulos **suplementarios** son os que suman 180º. Na seguinte escena pode verse o **ángulo A** (en verde) e o seu **suplementario B** (en vermello).

16.1- Modifica el valor do ángulo A e observa como cambia o valor do seu suplementario. o ángulo B **B= 180º-A**.

16.2- Con que razón de A coincide o seno do ángulo B?. E o coseno?.

16.3- Atopa a relación entre as tanxentes dos ángulos A e B

16.4- Se un ángulo pertence ó cuarto cuadrante, a que cuadrante pertence seu suplementario?. E seu complementario?.

17. ÁNGULOS OPOSTOS

Os ángulos **opostos** son os que medindo o mesmo, teñen sentido de xiro contrario: A e -A . Cúmprese que o ángulo **B = 360º-A** determina o mesmo punto na circunferencia goniométrica que **-A**, e polo tanto as súas razóns trigonométricas coinciden. Na seguinte escena pode verse o **ángulo A** (en verde) e o seu **oposto B** (en vermello).

17.1- Modifica el valor do ángulo A e observa como cambia o valor do seu oposto B.

17.2- Con que razón de A coincide o seno do ángulo B?. E o coseno?.

17.3- Atopa a relación entre as tanxentes dos ángulos A e B

17.4- Expresa as razóns trigonométricas destes ángulos en función das doutos ángulos do 1º cuadrante:

a) 475º	b) 1130º	c) 1215º
b) 885º	d) 695º	f) 985º

17.5- Se cos de (180º - α) = -1/3, sendo un ángulo agudo, calcula:

a) sen α	b) cos (90º- α)	c) tx (- α)
d) cos (180º + α)	e) sen (270 + α)	f) sen (90º + α)

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

APLICACIÓNS DA TRIGONOMETRÍA

18. ÁLGUNHAS APLICACIÓNS DA TRIGONOMETRÍA

Cálculo de alturas de elementos inaccesibles

18.1- Como ves na escena, o ángulo baixo o que vese o poste depende da distancia a él. Coñecida a distancia e o ángulo, comproba que a altura do poste depende da tanxente pola relación: *cateto oposto = tx* α *. cateto contiguo*

Comproba que, a partir dos valores de h e b, a tanxente do ángulo coincide coa definición desta razón trigonométrica. Anota algúns dos resultados.

Cálculo de distancias entre dous puntos

18.2- Comproba nesta outra escena como pódese calcular a distancia entre os puntos A e B, inaccesibles ó encontrarse unha montaña entre eles, coñecidas as distancias entre A e C e entre B e C, que si pódense medir.

Se temos o ángulo do punto C, por medio da expresión do coseno, podemos pescudar a distancia buscada.

Ó mover B ou C, observa como varia o ángulo. Anota algúns dos resultados.

Avda. do Mar, s/n – San Valentín
15500 – Fene – A Coruña
Telf. 981-343456 Fax. 981343855
cpi.axunqueira@edu.xunta.es
http://www.edu.xunta.es/centros/cpiaxunqueira

Medir alturas mediante un cuadrante

18.3- Nesta escena empregase o cuadrante para medir o ángulo que forma o edificio, á distancia na que a persoa encontrase para medilo.

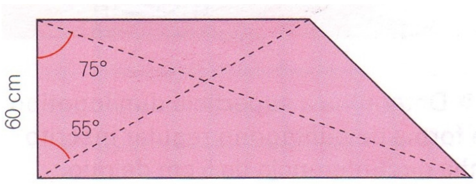
Como os lados do cuadrante e os que forma o chan coa liña que apunta ó borde do edificio son perpendiculares entre si, o ángulo formado é o mesmo.

Unha vez obtemos o ángulo, por medio das razóns trigonométricas pódese calcular a altura do edificio.

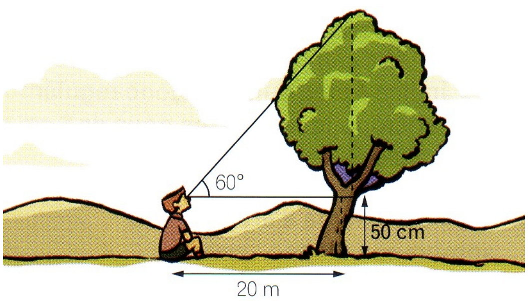
Que razón trigonométrica temos que aplicar cos datos que coñecemos?

19. EXERCICIOS DE APLICACIÓN DA TRIGONOMETRÍA

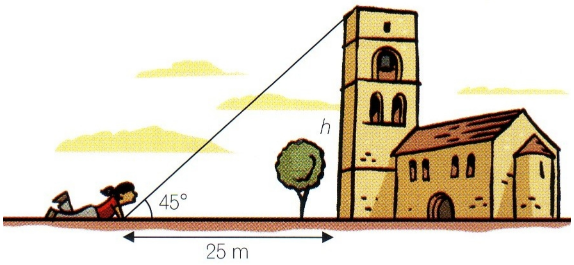
19.1- Calcula a área e o perímetro do seguinte trapecio rectángulo



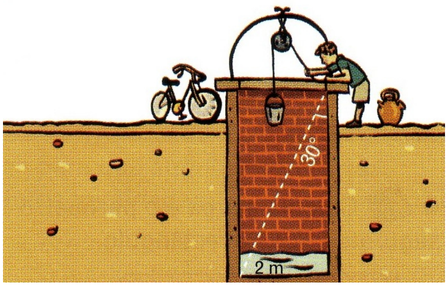
19.2- Un neno está sentado a 20 m dunha árbore e ve a súa copa cun ángulo de 60º. Se a altura dos ollos do rapaz é de 50 cm, canto mide a árbore?



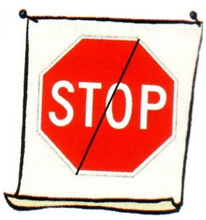
19.3- Calcula a altura da torre se vemos a parte alta cun ángulo de 45º e a distancia á que nos atopamos é de 25 m.



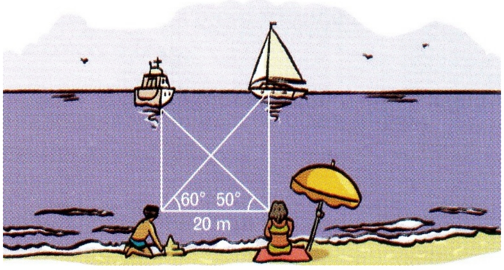
19.4- Calcula a profundidade dun pozo de 2m de largo se vemos o bordo oposto do fondo cun ángulo de 30º.



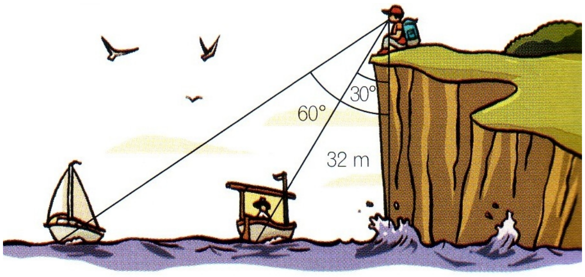
19.5- Calcula a cantidade de chapa necesaria para fabricar unha sinal de STOP de forma octogonal, se sabes que a diagonal marcada mide 1,25 m.



19.6- Desde a praia obsérvanse dous barcos. Calcula a distancia que hai entre eles cos ángulos que se indican.



19.7- Desde un acantilado, situado a 32 m sobre o nivel do mar, divísanse dúas embarcacións. Calcula a distancia entre as embarcacións se os ángulos son de 30º e 60º.



19.8- Dúas aldeas A e B, están situadas nunha estrada que vai do norte ao sur. Outra aldea C, a 10 Km en liña recta da estrada anterior, está situada a 20º ao sueste de A e a 30º ao sueste de B. Que distancia separa A de B?