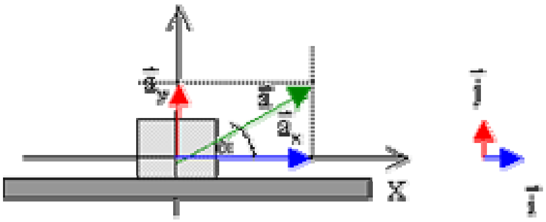
Componentes cartesianas de un vector

a) Vectores en el Plano

En ocasiones es conveniente descomponer un vector en suma de otros situados sobre los ejes de un sistema de coordenadas cartesianos. Por ejemplo cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo que solo se puede mover en la horizontal, es conveniente descomponer esa fuerza en una componente horizontal que actúa en la dirección del movimiento y tiene un efecto directo sobre éste y otra vertical que no interviene directamente sobre el movimiento sino de forma indirecta al “aligerar “ el roce con el suelo. De ahí la conveniencia de la descomposición.



La fuerza $\vec{a}$ queda como suma de sus componentes vectoriales $\vec{a}_y$, $\vec{a}_x$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

Los vectores $\vec{a}_x$ $\vec{a}_y$ se pueden poner en función de los vectores unitarios $\vec{i}$ y $\vec{j}$ (horizontal y vertical resp.) de la siguiente forma: $\vec{a}_x = a_x \vec{i}$; $\vec{a}_y = a_y \vec{j}$ donde los escalares a_x, a_y , módulos de las componentes vectoriales se denominan componentes escalares o componentes cartesianas de $\vec{a}$. El vector $\vec{a}$ puede ponerse como

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \text{ o tambien } \vec{a} = (a_x, a_y)$$

Nótese que a_x, a_y son las proyecciones del segmento a (módulo del vector) sobre los ejes coordenados.

$$a_x = a \cos\alpha \quad \text{y} \quad a_y = a\cos\beta = a \operatorname{sen}\alpha$$

donde α, β son los ángulos que forma el vector con los ejes X e Y respectivamente

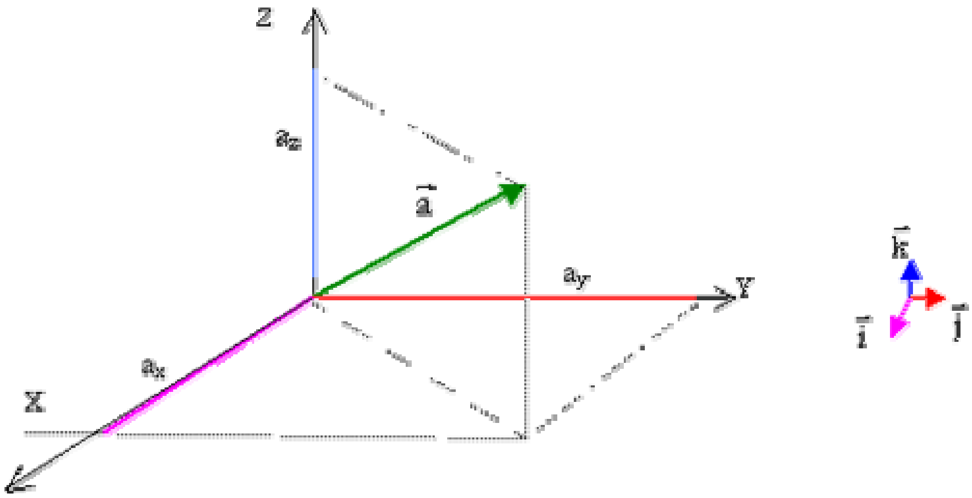
Ejercicio:

a) Se cumple que $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$.

b) Se cumple que el módulo del vector en función de las componentes es $a^2= a_x^2+ a_y^2$

B) Vectores en el espacio

Todo lo anterior se puede generalizar al caso de vectores en el espacio tridimensional. Para ello tomemos un sistema de coordenadas basados en tres ejes perpendiculares tal como indica la figura.



El vector $\vec{a}$ se puede poner en función de sus componentes como

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{o tambien } \vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

Las componentes a_x, a_y, a_z son las proyecciones ortogonales del segmento a sobre los ejes y por lo tanto

$$a_x = a\cos\alpha \quad a_y = a\cos\beta \quad a_z = a\cos\gamma$$

Donde γ, α, β son los ángulos que forma el vector $\vec{a}$ con los ejes Z, X,Y respectivamente.

- Para éstos se cumple que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
- El módulo del vector queda en función de las componentes de la forma

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

Al igual que en el caso del plano dejamos estos dos últimos resultados como ejercicio.

C)Expresión de las operaciones suma de vectores y producto de un vector por un número en función de las componentes

Por razonamientos geométricos y a partir de las definiciones de dichas operaciones se puede demostrar fácilmente que si :

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ y λ es un número real entonces:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) \quad \text{y} \quad \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

Dejamos al alumno la justificación de estas expresiones.

Ejercicio:

Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ y $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ Calcular:

a) $2\vec{a} - 3\vec{b}$
b) modulo de ambos vectores
c) Vector unitario en la dirección de $\vec{a}$
d) Vector de módulo 10 en la dirección de $\vec{a}$ y de sentido opuesto al mismo.