Se traballará coas páxinas web da unidade á vez que se completan as follas de traballo, e se realizarán as actividades propostas que aparecen tanto nas páxinas como nas follas de traballo.

A continuación móstrase a páxina de inicio da unidade didáctica de *programación lineal*, cos distintos apartados que conforman a unidade. Nas follas de traballo divídense algúns dos apartados para facilitar a comprensión dos problemas..

Descartes 2D

Álgebra

ÍNDICE

PROGRAMACIÓN LINEAL

INTRODUCCIÓN

La programación lineal es un conjunto de técnicas racionales de análisis y de resolución de problemas que tiene por objeto ayudar a los responsables en las decisiones sobre asuntos en los que interviene un gran número de variables.

El nombre de programación lineal no procede de la creación de programas de ordenador, sino de un término militar, programar, que significa 'realizar planes o propuestas de tiempo para el entrenamiento, la logística o el despliegue de las unidades de combate'.

Aunque parece ser que la programación lineal fue utilizada por G. Monge en 1776, se considera a L. V. Kantoróvich uno de sus creadores. La presentó en su libro Métodos matemáticos para la organización y la producción (1939) y la desarrolló en su trabajo Sobre la transferencia de masas (1942). Kantoróvich recibió el premio Nobel de economía en 1975 por sus aportaciones al problema de la asignación óptima de recursos humanos.

…..(Continúa)

OBJETIVOS

Resolver gráficamente inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Conocer la programación lineal y sus aplicaciones a la vida cotidiana.

Plantear y resolver situaciones con programación lineal.

Conocer dos ejemplos típicos: problema del transporte y de la dieta

Nombre: ____

1. INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Se llama **inecuación lineal con dos incógnitas** ________________________________

____. Se pueden reducir a los siguientes tipos:

____

Cada par de valores (x, y) que satisfacen la inecuación es una ______________ de la inecuación.

En la escena vemos la representación gráfica de las soluciones:

1.-Mueve el punto *P(x, y)* para saber si cumple o no cumple la inecuación.

2.- Modifica los parámetros *a*, *b* y *c* y vuelve a responder a la primera cuestión.

¿Cuántas soluciones tiene la inecuación? ________________

Las soluciones forman ___________________, que será cerrado o abierto dependiendo de si es

____

2. SISTEMA DE INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Un **sistema lineal de inecuaciones con dos incógnitas** ______________________________

____

Las soluciones del sistema son ____

____

Hemos visto que las soluciones de una inecuación lineal con dos incógnitas son las ______________

____

Consideremos el sistema formado por dos inecuaciones lineales con dos incógnitas. Representamos en la figura los semiplanos solución de ambas inecuaciones. Las soluciones del sistema son __________

____

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x + y \geq 0 \\ x > 4 \end{cases}$

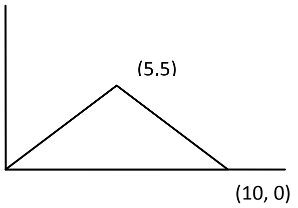
b) $\begin{cases} x + y \leq 3 \\ y \geq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y > 0 \\ -x + 3y < 2 \\ 5x > 10 \end{cases}$

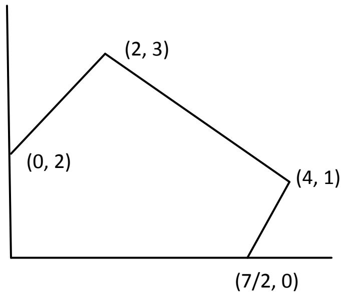
d) $\begin{cases} \frac{2}{4}x + 3y \geq \frac{1}{3} \\ x + 8 < 2 \end{cases}$

2. Encuentra el conjunto de inecuaciones que dan lugar a los siguientes recintos:

a)



b)



Nombre: ____

1. PROGRAMACIÓN LINEAL

En las actividades económicas normalmente se analizan variables ligadas mediante inecuaciones y cuyo objetivo es encontrar soluciones para las variables que hagan máximo el beneficio o mínimo el coste.

La **programación lineal** trata de ____

denominada __________________________, sujeta a una serie de ____________________ expresadas

mediante ______________________.

Nosotros sólo trataremos la programación lineal de dos variables. En ella la función objetivo será de la forma:

____

y las restricciones adoptarán la forma:

________________________ ó ________________________

El conjunto de soluciones factibles para este problema es ______________________, cuyos lados son

_________________________________; este polígono puede ser acotado o no acotado. Todo punto del

polígono cumple ________________________ y por tanto puede ser solución.

La **solución óptima** se encuentra siempre ___________________________________.

Ejemplo:

La función objetivo es: $f(x, y) = 4x + 2y$

Las restricciones son: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + 2y \leq 12$: $3x + 2y \leq 16$; $2x - y \leq 6$

Representa el recinto y busca el valor máximo.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

Dados los siguientes datos de un problema de programación lineal, determina su solución. Indica qué tipo de solución es: múltiple, no factible, única o no acotada.

a) Maximizar $F = 3x + 5$ sujeta a:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x \geq y$

$x + y \leq 8$

b) Minimizar $F = x + y$ sujeta a:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x - y \leq 5$

$x + y \geq 10$

c) Maximizar $F = x + 2y$ sujeta a:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x \geq y$

$x - 2y \geq -2$

d) Minimizar $F = 2x + 3y$ sujeta a:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x + y \geq 2$

$2x + y \geq 5$

e) Minimizar $F = 2x + y$ sujeta a:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x + y \geq 4$

$x \geq y$

f) Maximizar $F = x + 2y$ sujeta a:

$x + y \leq 1{,}5$

$x \geq y$

$x, y \geq 0$

$x, y \in N$

Nombre: ____

2. SOLUCIÓN GRÁFICA: RECTAS DE NIVEL

Las **rectas de nivel** asociadas a la función objetivo *f(x, y)=ax+by* son ______________________________

____

En todos los puntos de una recta de nivel, la función objetivo tiene el mismo valor *k*. La solución óptima se consigue ____

____

En la escena vemos las rectas de nivel usando los datos anteriores. Dibuja el recinto y las rectas de nivel.

Contesta:

1.-¿Qué valor del recinto hace máxima la función objetivo?

2.-¿Qué valores de *a* y *b* hacen que el problema tenga infinitas soluciones? ¿Cómo debe ser la recta para que esto ocurra?

3. OTRO EJEMPLO

Si las restricciones fueran:

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$15x + 28y \geq 450$
$25x + 10y \geq 200$

Y la función objetivo hubiera que minimizarla y fuera *f(x, y)=25x+30y*

Dibuja el recinto y las rectas de nivel:

Contesta:

3.-¿Qué punto hace mínima la función objetivo? ¿Y máxima?

4.-¿Qué valores de *a* y *b* hacen que el problema tenga infinitas soluciones?

ACTIVIDADES PROPUESTAS

Calcula gráficamente el máximo y el mínimo de las funciones:

$F_1 = 2x - y$ $F_2 = -3x - 3y$ $F_3 = -x + 2y$ $F_4 = 5x - 5y$

sujetas a las restricciones:

$x + y \leq 10$, $x + y \geq 2$, $x - y \leq 5$, $x - y \geq -5$, $x, y \geq 0$

Nombre: ____

1. PROBLEMA DEL TRANSPORTE

La formulación general de este problema es:

____

____

____

____

____

Ejercicio1

Una fábrica de jamones tiene dos secaderos A y B que producen 50 y 80 jamones por mes. Se distribuyen a tres tiendas de las ciudades M, N y O cuya demanda es 35, 50 y 45 respectivamente. El coste del transporte por jamón en euros se ve en la tabla siguiente

	M	N	O
A	5	6	8
B	7	4	2

Averigua cuántos jamones deben enviarse desde cada secadero a cada tienda para hacer mínimo el gasto en transporte

Solución: En primer lugar debemos plantear el problema: sean x e y los jamones que salen del secadero A para las tiendas de M y N, en la tabla siguiente mostramos la distribución

	M	N	O
A			
B			

Como todas estas condiciones deben ser positivas se deduce que las restricciones del problema son:

____

Simplificando queda:

____

La función coste se obtiene multiplicando los elementos de la tabla de coste por los de la tabla de distribución y simplificando queda: ___________________________.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

Resuelve:

Una empresa embotelladora de agua mineral envasa al día 10000 litros de agua en su planta A y 15000 litros de agua en su planta B. Los puntos de distribución del agua son tres grandes superficies S_1, S_2, S_3, con una demanda que es de 12000, 8000 y 5000 litros de agua diaria. El coste del transporte por caja desde cada una de las plantas a los centros de venta es de :

	S_1	S_2	S_3
A	2	1,5	3
B	1	2	2,5

¿Cuántas cajas se deben enviar desde cada planta a cada superficie para que el transporte sea lo más económico posible?

Nombre: ____

2. PROBLEMA DE LA DIETA

La formulación general de este problema es:

____

____

____

____

____

Ejercicio 2:

En un hospital se quiere elaborar una dieta alimenticia para un determinado grupo de enfermos con dos alimentos A y B. Estos alimentos contienen tres principios nutritivos: N_1, N_2 y N_3. Una unidad de A vale 1 euro y contiene 2 unidades de N_1, 1 de N_2 y 1 de N_3. Una unidad de B vale 2.40 euros y contiene 1, 3, y 2 unidades de N_1, N_2 y N_3 respectivamente. Un enfermo de este grupo necesita diariamente al menos 4, 6 y 5 unidades de N_1, N_2 y N_3 respectivamente. Se pide:

a) Plantear un problema de programación lineal que permita determinar las cantidades de alimentos A y B que dan lugar a la dieta de coste mínimo.

b) Resolver el problema

Solución: Organizamos los datos en una tabla de doble entrada

	Cantidad de alimento	N_1	N_2	N_3	Precio
A					
B					

El gasto a minimizar es ___________________________ y las restricciones serán:

____

Observa la escena y mueve la recta objetivo. Indica las soluciones del problema.

____

____

ACTIVIDADES PROPUESTAS

Resuelve:

Los alimentos A y B se preparan en un laboratorio. Ambos contienen los principios dietéticos a, b, c, y d. En el cuadro se especifica el número de unidades de cada principio que contiene cada gramo de alimento. Un gramo de A cuesta 5 euros y un gramo de B 3,5 euros. Si la cantidad mínima diaria de una dieta es de 50 unidades de cada uno de los principios dietéticos, a, b, c, d, ¿cuál debe ser la composición de la dieta para que el coste diario sea mínimo?

	a	b	c	d
A	8	8	12	15
B	10	12	8	10

PROBLEMAS

1. Debido a las restricciones pesqueras cierta empresa puede pescar como máximo 2.000 toneladas de merluza y 2.000 toneladas de rape, además, en total, las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las 3.000 toneladas. Si el precio de la merluza es de 10 €/kg y el precio del rape es de 15 €/kg, ¿qué cantidades debe pescar para obtener el máximo beneficio?

2. Disponemos de 210.000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A, que rinden el 10% y las del tipo B, que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130.000 euros en las del tipo A y como mínimo 60.000 en las del tipo B. Además queremos que la inversión en las del tipo A sea menor que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?

3. Un comerciante acude a cierto mercado a comprar naranjas con 500 euros. Le ofrecen dos tipos de naranjas: las de tipo A a 0,5 euros el kg. y las de tipo B a 0,80 euros el kg. Sabiendo que sólo dispone en su furgoneta de espacio para transportar 700 kg. de naranjas como máximo y que piensa vender el kg. de naranjas tipo A a 0,58 euros y el kg. de tipo B a 0,90 euros. ¿Cuántos kg. de naranjas de cada tipo deberá comprar para obtener máximo beneficio? ¿Cuál será ese beneficio máximo?

4. Un sastre tiene 80 m^2 de tela de algodón y 120 m^2 de tela de lana. Un traje requiere 1 m^2 de algodón y 3 m^2 de lana, y un vestido de mujer requiere 2 m^2 de cada una de las dos telas. Calcular el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden al mismo precio.

5. Una fábrica produce confitura de albaricoque y confitura de ciruela. El doble de la producción de confitura de ciruela es menor o igual que la producción de confitura de albaricoque más 800 unidades. También, el triple de la producción de confitura de albaricoque más el doble de la producción de confitura de ciruela, es menor o igual que 2400 unidades.
   Cada unidad de confitura de albaricoque produce un beneficio de 60 euros y cada unidad de confitura de ciruela, 80 euros. ¿Cuántas unidades de cada tipo de confitura se han de producir para obtener un beneficio máximo?

6. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autobuses de 40 plazas y 10 de 50 plazas, pero sólo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autocar grande cuesta 800 € y el de uno pequeño 600 €. Calcular cuántos autobuses de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela.

7. En una granja se da una dieta de engorde, con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado sólo se encuentra dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de una unidad de A y 5 de B, y el otro tipo, Y, con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo X es de 10 euros y del tipo Y es de 30 €. ¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo?

8. Una compañía está especializada en la fabricación de palos de hockey y juegos de ajedrez. La fabricación de estos artículos se hace en los puestos de mecanización A, B y C.
   Cada palo de hockey requiere un proceso de 4 horas de duración en el puesto de mecanización A y de 2 horas en el B. Un juego de ajedrez, por su parte, necesita de 6 horas en el puesto de mecanización A, de 6 en el B y de 1 en el C.
   El puesto de mecanización A dispone de un máximo de 120 horas mensuales, el B de 72 y el C de 10. Si cada palo de hockey se vende a 20 euros y cada juego de ajedrea a 40, ¿cuántos palos de hockey y cuántos juegos de ajedrez deberá fabricar mensualmente la compañía si desea maximizar sus beneficios?