



## Trigonometría

### Contenidos

1. Los ángulos y su medida
  - Recorridos en la circunferencia
  - Radianes
  - Grados sexagesimales
  - De radianes a grados
  - Midiendo ángulos
2. Razones trigonométricas
  - Razones trigonométricas
  - Sen y cos en la circunferencia
  - Tangente en la circunferencia
  - Razones de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$
3. Relaciones trigonométricas
  - Relaciones fundamentales
4. Resolver triángulos rectángulos
  - Con un ángulo y la hipotenusa
  - Dados un ángulo y un cateto
  - Conocidos dos lados
5. Razones de ángulos cualesquiera
  - Seno
  - Coseno
  - Tangente
6. Aplicaciones de la trigonometría
  - Resolver problemas métricos

### Objetivos

- Calcular las razones trigonométricas de un ángulo.
- Hallar todas las razones trigonométricas de un ángulo a partir de una de ellas.
- Resolver triángulos rectángulos cuando se conocen dos lados o un lado y un ángulo.
- Resolver situaciones relacionadas con la geometría en las que se precise calcular ángulos y distancias entre dos puntos.
- Utilizar la calculadora para obtener razones o ángulos.

**Antes de empezar**

En la escena de la derecha tienes una presentación en la que puedes leer la historia de la trigonometría; pulsando las flechas y puedes ir pasando las distintas diapositivas.

| CONTESTA   | RESPUESTA |
|--|-----------|
| ¿Cuál es el primer monumento que se conoce que sirve para cálculos astronómicos? |           |
| Cita varias civilizaciones antiguas que utilizaran la trigonometría              |           |
| Cita varias utilidades de la trigonometría en la antigüedad                      |           |
| Cita varias utilidades de la trigonometría en la actualidad                      |           |

**Investiga**



Seguramente habrás visto esta señal en las carreteras y conoces lo que indica: pendiente prolongada. También recordarás el concepto de pendiente de una recta.

Según éste el 10% significa que cada 100 m recorridos en horizontal, subimos (o bajamos) 10 en vertical. Pero algunos interpretan los 100 m como el camino real recorrido.

¿Tú qué opinas?, ¿influye mucho considerarlo de una u otra forma?

Explica brevemente tu opinión

---



---

Pulsa el botón



para repasar semejanza y el Teorema de Pitágoras.

Pulsa para ir a la página siguiente.

**1. Los ángulos y su medida**

**1.a. Recorridos en la circunferencia**

**Trigonometría** es una palabra que deriva del griego Τριγωνομετρία, Tri (Τρι) tres, gono (γωνο) ángulo, metría (μετρία) medida, es decir, "medida de tres ángulos". Puedes consultar la definición de trigonometría que da el diccionario de la R.A.E.

En este curso se tratará únicamente la trigonometría plana.

Con objeto de estudiar los ángulos y su medida consideraremos que un ángulo es un recorrido en la circunferencia con centro el origen y de radio unidad o **circunferencia goniométrica**, el punto de partida de estos recorridos se situará en el punto de coordenadas (1,0) y la medida de un ángulo será la medida de ese recorrido. Los ángulos pueden tener sentido positivo o negativo según sea el de su recorrido; si es contrario al de las agujas del reloj será positivo y si es igual, negativo.

Observa y manipula la escena de la derecha:

| CONTESTA  | RESPUESTA |
|---|-----------|
| ¿Qué es un ángulo?                                      |           |
| ¿Qué significa que un ángulo tenga sentido positivo?    |           |
| ¿Qué significa que un ángulo tenga sentido negativo?    |           |
| ¿A qué se le llama circunferencia <b>goniométrica</b> ? |           |

| Dibuja un ángulo <b>positivo</b> | Dibuja un ángulo <b>negativo</b> |
|----------------------------------|----------------------------------|
|                                  |                                  |

Pulsa en el botón para resolver un ejercicio.

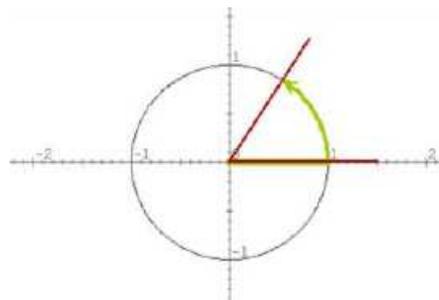
Dibuja aquí al menos 4 de los ángulos que se proponen, y escribe al lado la opción correcta que debes escoger en la escena:

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |

Pulsa para ir a la página siguiente.

**1.b. Radianes**

Medir un ángulo es medir su recorrido en la circunferencia. Como la medida de toda la circunferencia es  **$2 \cdot \pi \cdot \text{radio}$** , resulta conveniente tomar como unidad de medida el radio. En la página anterior, los ángulos se representaron en una circunferencia de radio 1, ello no significa que el radio mida 1 cm ó 1 pie ó 1 m, sino que el radio es la unidad de medida tomada. Por razones evidentes a esta unidad se le llama radián.



La escena comienza mostrando el ángulo de medida un radián, aquel cuyo recorrido en la circunferencia es igual a su radio. Luego, en los ejemplos, se pide una estimación de la medida de algunos ángulos. Escribe aquí la opción correcta en cada caso:

| Ejemplo 1 | Ejemplo 2 |
|-----------|-----------|
|           |           |

Pulsa en el botón



para Visualizar algunos ángulos en radianes.

Pulsa  para ir a la página siguiente.

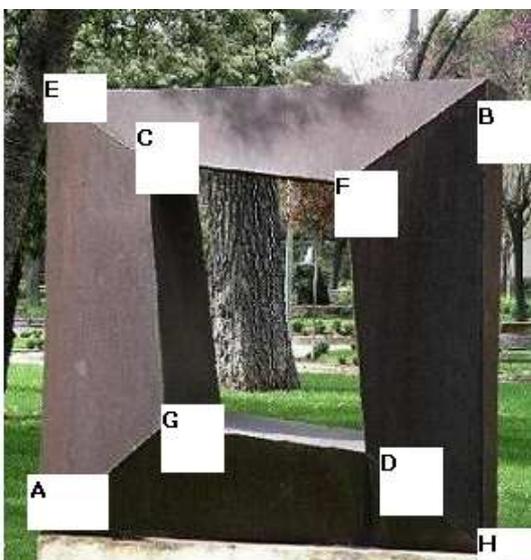
**1.c. Grados sexagesimales**

Ya conoces el sistema sexagesimal de medida de ángulos. Al dividir la circunferencia en 360 partes iguales, obtenemos un grado, a su vez cada grado se compone de 60 minutos y cada minuto de 60 segundos. Así un ángulo se mide en:

**Grados ° minutos ' segundos "**

**Sistema Sexagesimal**  
 Tiene base 60. Este sistema de medida lo hemos heredado de la antigua Babilonia, observa la semejanza con la forma en que medimos el tiempo. ¿Sabes por qué?

Con ayuda de la escena de la derecha, mide los ángulos que se indican de la fotografía



|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> |
|          |          |          |
| <b>D</b> | <b>E</b> | <b>F</b> |
|          |          |          |

Pulsa en el botón  para resolver un ejercicio.

En las calculadoras usuales suelen aparecer cuatro tipos de medida de ángulos, "DEG" o expresión en grados sexagesimales; la tecla  $\langle \text{° ' ''} \rangle$  da los grados enteros del ángulo y la parte decimal se cuenta en minutos (1/60 de grado) y segundos (1/60 de minuto). Otro tipo se denota con "RAD" es decir, radianes. Y también se suele ver la expresión del ángulo en grados centesimales "GRAD" cada grado centesimal es la centésima parte del ángulo recto, toda la circunferencia está formada por 400 grados centesimales.  $1\text{GRAD}=90/100 \text{ DEG}$

Intenta completar la siguiente tabla, expresando cada ángulo en los cuatro sistemas de medida descritos.

| GRAD | DEG | ° ' ''         | RAD      |
|------|-----|----------------|----------|
| -100 |     |                |          |
|      | 180 |                |          |
|      |     |                | $\pi/6$  |
|      |     | $60^\circ 30'$ |          |
|      |     |                | $-\pi/4$ |
|      | 135 |                |          |

Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 1.d. De grados a radianes y de radianes a grados

Lee la explicación teórica y observa la escena.

**Completa:**

El semiperímetro de la semicircunferencia es \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ radianes = \_\_\_\_\_ grados

es decir, \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ radián = \_\_\_\_\_ grado

Si despejamos el grado resulta:

1 grado = \_\_\_\_\_ ~ \_\_\_\_\_ radianes

Si despejamos el radián resulta:

1 radián = \_\_\_\_\_ grados ~ \_\_\_\_\_ grados

1 grado

 = 

$\frac{\pi}{180}$  radianes

1 radián

 = 

$\frac{180}{\pi}$  grados

Practica con la escena el paso de un sistema de medida al otro.

### EJERCICIOS

1. Dibuja en la circunferencia goniométrica los ángulos de  $120^\circ$ ,  $-50^\circ$  y  $315^\circ$ :

2. Dibuja en la circunferencia goniométrica los ángulos de  $5\pi/6$ ,  $3\pi/4$ , y  $3\pi/2$  rad:

3. Pasa a radianes:

a.  $150^\circ$ ,      b.  $210^\circ$       c.  $270^\circ$       d.  $60^\circ$

4. Pasa a grados:

a.  $11\pi/6$  rad      b.  $\pi/4$  rad      c.  $5\pi/4$  rad      d.  $2\pi/3$  rad

Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 1.e. Midiendo ángulos

En la escena de esta página se puede medir ángulos con distintas unidades y distinto signo. Practica con ella cambiando el sentido de giro del ángulo y las unidades de medida.

Pulsa en el botón  para ver cuatro ejercicios resueltos.

Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2. Razones trigonométricas

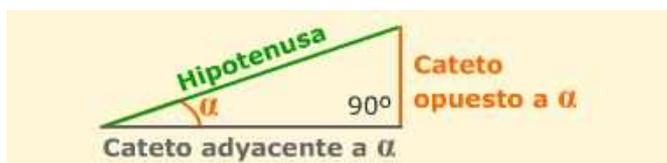
### 2.a. Razones trigonométricas

En los triángulos semejantes los ángulos son iguales y los lados homólogos son proporcionales. La razón entre los lados de un triángulo determina su forma.

**Recuerda**  
Se llama razón o proporción entre dos números a su cociente.

Dado un triángulo rectángulo, las **razones trigonométricas** del ángulo agudo  $\alpha$  se definen:

- ✓ El seno es el cociente entre \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_.
- ✓ El coseno es el cociente entre \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_.
- ✓ La tangente es el cociente entre \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_.



En la escena puedes variar el valor del ángulo  $\alpha$  y el tamaño del triángulo y observar que estas razones no dependen del tamaño del triángulo sino del ángulo  $\alpha$ .

También se utilizan las razones inversas a éstas, puedes verlas pulsando el enlace [aquí](#)  
Completa la tabla con estas razones para un ángulo  $\alpha$

|                       |                                       |                                      |
|-----------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| $\sec \alpha =$ _____ | $\operatorname{cosec} \alpha =$ _____ | $\operatorname{cotg} \alpha =$ _____ |
|-----------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|

Pulsa para ir a la página siguiente.

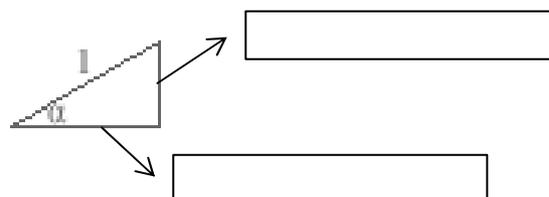
### 2.b. Seno y coseno en la circunferencia

Siguiendo las instrucciones de la escena vemos definidos el seno y el coseno en la circunferencia goniométrica o de radio unidad.

En el triángulo rectángulo que se forma como la hipotenusa es 1,

el cateto opuesto es el \_\_\_\_\_

el adyacente el \_\_\_\_\_



Observa que **(cos  $\alpha$ , sen  $\alpha$ )** son las coordenadas del punto final del ángulo  $\alpha$  en la circunferencia de radio unidad.

Pulsa para ir a la página siguiente.

### 2.c. Tangente en la circunferencia

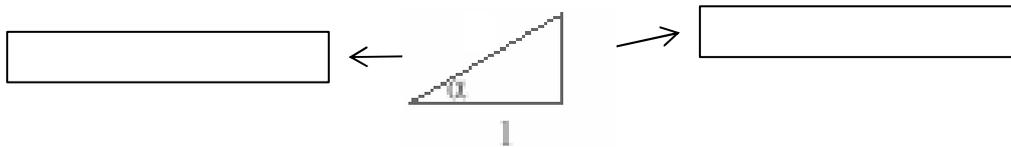
En la escena se comprende por qué al cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente se le llama tangente, su valor queda definido sobre una recta tangente a la circunferencia en el punto (1,0).

Observa en la escena que cuando el cateto adyacente vale 1, la hipotenusa es igual a la inversa del cos  $\alpha$ .

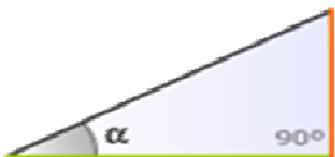
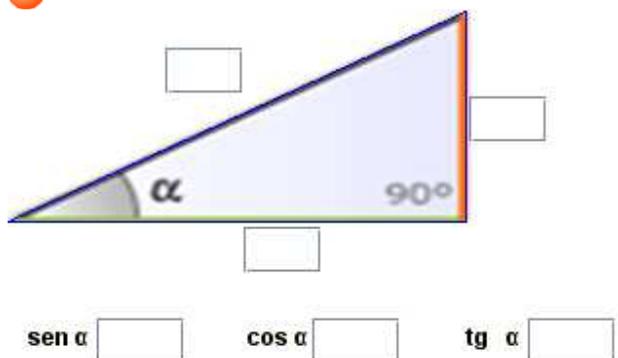
Al cociente: 
$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

se le llama \_\_\_\_\_ de  $\alpha$  y se abrevia con \_\_\_\_\_

Completa el triángulo



Pulsa en el botón  para completar los triángulos y reconocer las razones trigonométricas. Aprovecha la escena para comprobar si tus resultados son correctos.

|  |   |
|--|---|
| <p>1 </p> | <p>5 <math>\cos(\alpha) = \frac{\text{[ ]}}{\text{[ ]}}</math></p>  |
| <p>2 </p> | <p>6 <math>\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{[ ]}}{\text{[ ]}}</math></p>   |
| <p>3 </p> | <p>7 </p> <p>sen <math>\alpha</math> [ ]    cos <math>\alpha</math> [ ]    tg <math>\alpha</math> [ ]</p> |
| <p>4 <math>\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{[ ]}}{\text{[ ]}}</math></p>                     |   |

Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 2.d. Las razones de 30°, 45° y 60°

Los ángulos de 30°, 45° y 60° aparecen con bastante frecuencia, fíjate cómo se calculan sus razones a partir de la definición si buscamos los triángulos adecuados.

Con ayuda de la escena de la derecha completa la tabla:

|     | seno | coseno | tangente |
|-----|------|--------|----------|
| 30° |      |        |          |
| 45° |      |        |          |
| 60° |      |        |          |

Memorizar esta tabla es fácil si observas el orden que guardan. Una vez aprendidos los senos con las raíces consecutivas, los cosenos salen en orden inverso.

Pulsa en el botón  para trabajar con la escena y practicar con estas razones.

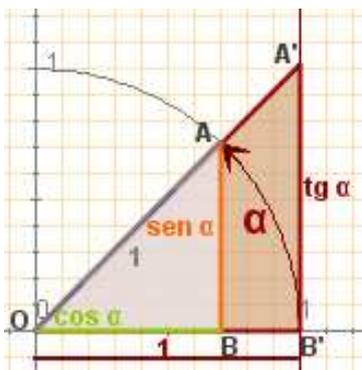
| Con la calculadora   |  |
|--|--|
| <b>Dado un ángulo <math>\alpha</math> obtener sus razones trigonométricas.</b>   | <b>Dada una razón obtener el ángulo <math>\alpha</math> correspondiente</b>  |
| <p>Por ejemplo el <math>\text{sen } 28^\circ 30'</math></p> <p>Pon la calculadora en modo <input type="text" value="DEG"/></p> <p>Teclea 28 <input "="" type="text" value="° ' "/> 30 <input "="" type="text" value="° ' "/> <input type="text" value="sin"/></p> <p>Obtenemos: 0,477158760</p> <p>En algunas calculadoras hay que pulsar la tecla <input type="text" value="sin"/> antes de introducir el ángulo, comprueba cómo funciona la tuya.</p> <p>Si queremos obtener el <b>cos <math>\alpha</math></b> ó la <b>tg <math>\alpha</math></b> procederemos de la misma forma pero pulsando las teclas <input type="text" value="cos"/> y <input type="text" value="tan"/> respectivamente.</p> | <p>Con el mismo valor que tienes en la pantalla:</p> <p><input type="text" value="0.477158760"/></p> <p>Comprueba que la calculadora sigue en modo <input type="text" value="DEG"/></p> <p>Teclea <input type="text" value="SHIFT"/> <input type="text" value="sin"/></p> <p>Obtenemos: <input type="text" value="28.5"/> en grados, si queremos grados, minutos y segundos, pulsamos <input type="text" value="SHIFT"/> <input "="" type="text" value="° ' "/> obteniendo <input type="text" value="28° 30'"/>.</p> |

Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 3. Relaciones trigonométricas

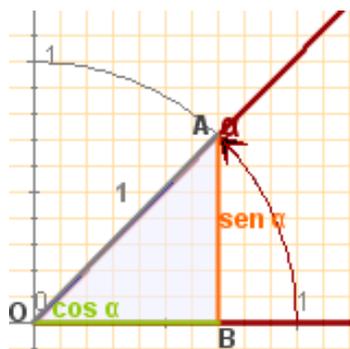
#### 3.a. Relaciones fundamentales

Si se aplican la semejanza y el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos "básicos", es decir, con hipotenusa=1 o con cateto adyacente=1, se obtienen las relaciones fundamentales de la trigonometría:



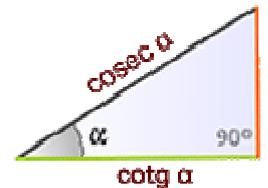
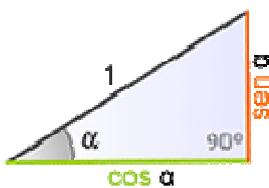
Los triángulos OBA y OB'A' son semejantes, por tanto:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\text{tg } \alpha}{1}$$



Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo OBA de la figura obtenemos:

Al medir los lados de un triángulo rectángulo se puede tomar como unidad la hipotenusa, o uno de los catetos; obteniéndose en cada caso los triángulos de la figura.



Escribe tú las relaciones

Pulsa en el botón

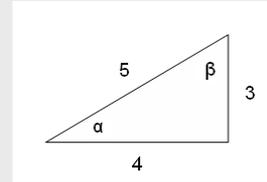


para comprobar si las has aprendido.

**EJERCICIOS**

5. En el triángulo de la figura calcula:

- a)  $\text{sen } \alpha$
- b)  $\text{cos } \alpha$
- c)  $\text{tg } \alpha$
- d)  $\text{sen } \beta$
- e)  $\text{cos } \beta$
- f)  $\text{tg } \beta$

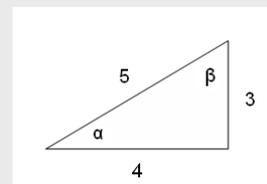


6. Obtén con la calculadora:

- a)  $\text{sen } 30^\circ =$
- b)  $\text{cos } 60^\circ =$
- c)  $\text{tg } 45^\circ =$

7. Obtén con la calculadora los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  del ejercicio 5.

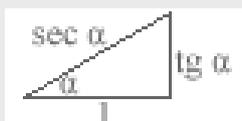
8. Comprueba en el ángulo  $\alpha$  del triángulo de la figura que se cumplen las relaciones fundamentales



9. Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo  $\alpha$  tal que  $\text{sen } \alpha = 0,3$

10. Comprueba que se cumple la relación:  $1 + \text{tg}^2 \alpha = \text{sec}^2 \alpha$

Recuerda el triángulo:



Pulsa  para ir a la página siguiente.

## 4. Resolver triángulos rectángulos

### 4.a. Con un ángulo y la hipotenusa

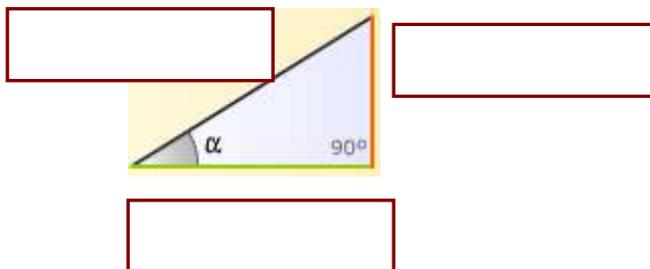
Resolver un triángulo rectángulo es calcular los datos desconocidos, lados o ángulos, a partir de los conocidos..

Para hallar los catetos de un triángulo rectángulo del que se conocen las medidas de la hipotenusa y de un ángulo agudo, pensaremos en el triángulo que multiplicamos por la hipotenusa.



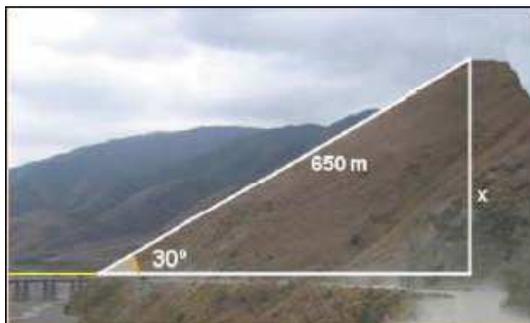
Si pulsas  puedes ver una animación que lo explica.

Completa tú como quedará el triángulo



En la escena vemos un ejemplo resuelto sobre como calcular la altura de un monte.

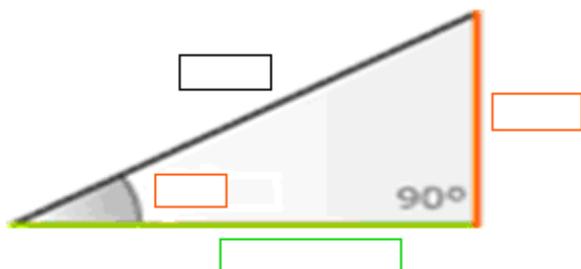
Completa la resolución en este recuadro



Pulsa en el botón  para hacer un ejercicio.

PROBLEMA 1: Completa el enunciado y resuélvelo:

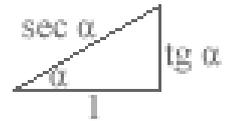
Del triángulo rectángulo de la figura se conocen un ángulo, \_\_\_\_\_°, y la hipotenusa \_\_\_\_\_ cm. Tenemos que hallar los catetos en función de las razones trigonométricas del ángulo dado



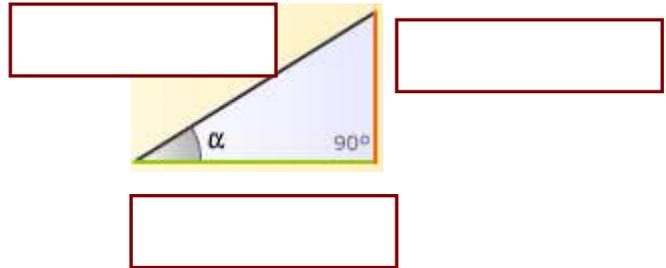
Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 4.b. Conocidos un cateto y un ángulo agudo

Para hallar los lados de un triángulo rectángulo del que se conocen las medidas de un cateto y de un ángulo no recto, pensemos en el triángulo que se multiplica por el cateto adyacente:



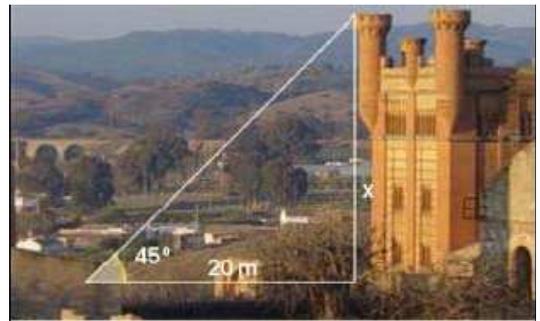
Si pulsas  puedes ver una animación que lo explica.



Completa tú como quedará el triángulo

En la escena vemos un ejemplo resuelto sobre como calcular la altura de una torre

Completa la resolución en este recuadro

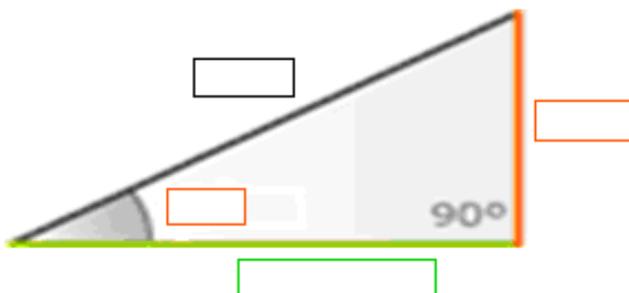


Pulsa en el botón  para hacer un ejercicio.

PROBLEMA 2: Completa el enunciado y resuélvelo:

Del triángulo rectángulo de la figura se conocen un ángulo, \_\_\_\_\_°, y el cateto adyacente \_\_\_\_\_ cm.

Tenemos que hallar los otros lados en función de las razones trigonométricas del ángulo conocido



Pulsa  para ir a la página siguiente.

**4.c. Conocidos dos lados del triángulo**

Para hallar el otro lado del triángulo se aplicará el teorema de Pitágoras, el ángulo se determinará como el arco cuya tangente es

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Su valor se obtiene en la calculadora al pulsar la tecla **atg**, una vez introducido en pantalla ese cociente

o bien como el arco cuyo seno es

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

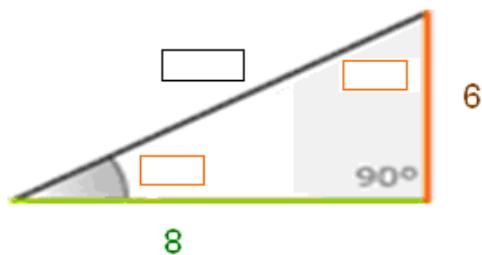
dependiendo de los datos iniciales.

Para calcular el otro ángulo basta restar de 90°.

|  |   |
|--|---|
| <p><i>Al utilizar la calculadora fíjate si estás trabajando en grados o en radianes, Si usas la que aparece pulsando sobre el botón aparece iluminado RAD, quiere decir en radianes, pulsa sobre DEG si quieres cambiar a grados sexagesimales</i></p> |  |
|--|---|

En la escena de la derecha vemos un ejemplo resuelto sobre esto; si mueves el punto naranja del vértice superior puedes modificar el tamaño del triángulo

Con la ayuda de esta escena, resuelve el triángulo de catetos 8 y 6



hipotenusa =  $\sqrt{\quad\quad\quad}$  =

$\text{atan}\left(\frac{\quad}{\quad}\right) =$

$90^\circ - \quad =$

Pulsa en el botón  para ver un caso particular del Teorema de Pitágoras

**Método de cálculo:**

1. Escribe el teorema de Pitágoras
2. Despeja uno de los catetos
3. Fíjate que el segundo miembro de la igualdad se corresponde con una igualdad notable, que debes escribir a continuación:
4. Aplica esta igualdad notable al paso 2
5. Despeja el cateto
6. Escribe ahora el caso particular de que el cateto y la hipotenusa difieren en una unidad

|  |
|--|
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

Pulsa  para ir a la página siguiente.

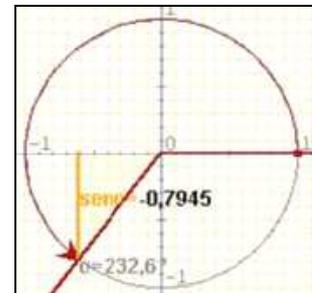
## 5. Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

### 5.a. Seno de un ángulo cualquiera

Recuerda que la circunferencia goniométrica es una circunferencia de radio unidad y centro el origen de coordenadas; en ella (**cosa, sena**) son las coordenadas del punto final del ángulo  $\alpha$ .

Esto que vimos para los ángulos agudos podemos hacerlo extensible a ángulos cualesquiera.

El **seno** de un ángulo es la **coordenada vertical** del punto final del recorrido del ángulo sobre la circunferencia goniométrica. Observa que su valor está comprendido entre -1 y 1.

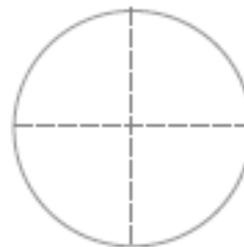


→ Arrastra la punta de la flecha para hacer variar el ángulo y con ello el valor del seno.

Fíjate en la escena cómo varía el signo que toma el seno según el cuadrante en que esté el ángulo.

Anota tú los signos en la circunferencia →

Observa también que  $\text{sen}(360^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$   
 y que  $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$



¿Cuántos ángulos hay entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$  cuyo seno sea  $-1/2$ ? \_\_\_\_\_

Pulsa en el botón  para ver un ejercicio resuelto

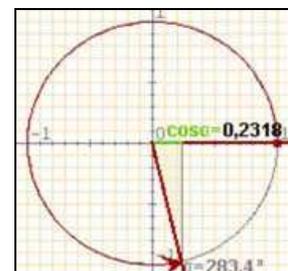
Pulsa  para ir a la página siguiente.

### 5.b. Coseno de un ángulo cualquiera

De la misma manera que el seno de un ángulo es la ordenada, el **coseno** es la **abscisa** del punto final del recorrido que marca el ángulo en la circunferencia.

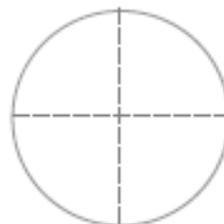
El coseno de un ángulo puede tomar todos los valores entre -1 y 1.

Fíjate en la escena cómo varía el signo que toma el coseno según el cuadrante en que esté el ángulo.



Anota tú los signos en la circunferencia →

Observa que  $\text{cos}(360^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$   
 y que  $\text{cos}(180^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$



¿Cuántos ángulos hay entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$  cuyo coseno sea  $-1/2$ ? \_\_\_\_\_

Pulsa en el botón



para ver un ejercicio resuelto

Pulsa



para ir a la página siguiente.

### 5.c. Tangente de un ángulo cualquiera

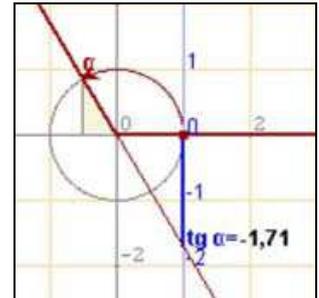
Con la relación fundamental **tg α = seno/cosa** se amplia la definición de tangente en ángulos agudos a un ángulo cualquiera.

Observa que la tangente se representa en la recta tangente a la circunferencia goniométrica en el punto donde se inicia el ángulo.

¿Qué ocurre con el valor del coseno para los ángulos de 90° y 270°?

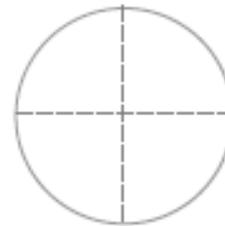
¿Qué ocurre entonces con la tangente para esos ángulos?

¿Por qué? \_\_\_\_\_



Fíjate en la escena cómo varía el signo que toma la tangente según el cuadrante en que esté el ángulo.

Anota tú los signos en la circunferencia →



¿Cuántos ángulos hay entre 0° y 360° cuya tangente sea 2? \_\_\_\_\_

Pulsa en el botón



para ver un ejercicio resuelto.

Pulsa



para ir a la página siguiente.

### EJERCICIOS

11. Dibuja un ángulo del tercer cuadrante cuyo cos sea -0,6 y calcula el seno y la tangente

12. Calcula cosa siendo tg α = -2 y α del cuarto cuadrante.

## 6. Aplicaciones de la trigonometría

### 6.a. Resolver problemas métricos

La trigonometría es útil para resolver problemas geométricos y calcular longitudes en la realidad.

Con un teodolito como el de la fotografía, se pueden medir ángulos, tanto en el plano vertical como en el horizontal, que nos permiten, aplicando las razones trigonométricas, hallar distancias o calcular alturas de puntos inaccesibles.

En estos casos aunque el triángulo de partida no sea rectángulo, trazando su altura podemos obtener dos triángulos rectángulos a resolver con los datos que tenemos.



En la escena puedes ver algunos ejemplos.

### Calcular áreas de polígonos regulares

La escena nos permite calcular paso a paso el área de polígonos regulares, de 5 a 10 lados, completa la tabla siguiente con los ejemplos de la escena

| Longitud del lado | Número de lados | Ángulo central | Tangente del ángulo | Apotema | Perímetro | Área |
|-------------------|-----------------|----------------|---------------------|---------|-----------|------|
|                   |                 |                |                     |         |           |      |
|                   |                 |                |                     |         |           |      |
|                   |                 |                |                     |         |           |      |
|                   |                 |                |                     |         |           |      |
|                   |                 |                |                     |         |           |      |
|                   |                 |                |                     |         |           |      |

### Calcular medidas topográficas

Para medir la anchura de un río se han medido los ángulos de la figura desde dos puntos de una orilla distantes 160 m. ¿Qué anchura tiene el río?

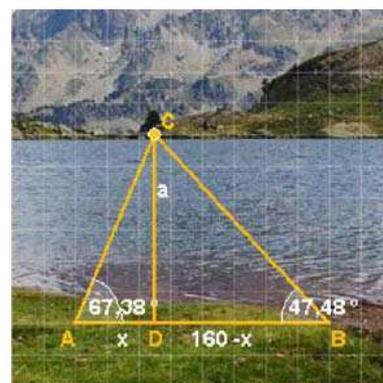
La anchura del río es la altura del triángulo **ACB** que no es rectángulo, pero si lo son los triángulos **ADC** y **BDC**

En el triángulo **ADC**  $\text{tg } 67,38^\circ = \frac{a}{x} \Rightarrow a = x \cdot \text{tg } 67,38^\circ$

En el triángulo **BDC**  $\text{tg } 47,48^\circ = \frac{a}{160-x} \Rightarrow a = (160-x) \cdot \text{tg } 47,48^\circ$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones que resolvemos por igualación.

$$\begin{cases} a = \\ a = \end{cases}$$



Pulsa para ir a la página siguiente.



## Recuerda lo más importante – RESUMEN

### Los ángulos y su medida

Para medir ángulos empleamos \_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_.

Un **radián** es \_\_\_\_\_

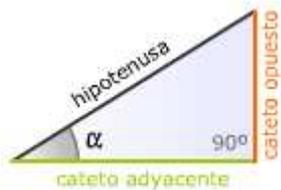
De grados a radianes

$$1 \text{ grado} = \text{radianes}$$

De radianes a grados

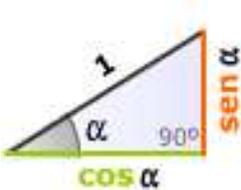
$$1 \text{ radián} = \text{grados}$$

### Razones trigonométricas



$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad \cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

### Relaciones fundamentales



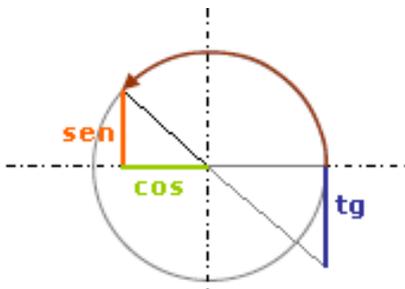
Entre el seno y el coseno

Entre el seno, el coseno y la tangente

### Razones de ángulos cualesquiera

**(cos α, sen α)** son las **coordenadas** del punto final del ángulo α en la circunferencia goniométrica o de radio unidad

Signos de las razones trigonométricas



| Seno | Coseno | Tangente |
|------|--------|----------|
|      |        |          |

### Resolver un triángulo rectángulo

Consiste en \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_.

Pulsa para ir a la página siguiente.



## Para practicar

Ahora vas a practicar resolviendo distintos EJERCICIOS. En las siguientes páginas encontrarás EJERCICIOS de:

- Medida de ángulos**
- Relaciones fundamentales**
- Resolución de triángulos**

Completa el enunciado con los datos con los que te aparece cada EJERCICIO en la pantalla y después resuélvelo.

Es importante que primero lo resuelvas tú y después compruebes en el ordenador si lo has hecho bien.

### Medida de ángulos.

#### Pasar de grados a radianes (haz al menos cuatro ejercicios)

|  |   |
|--|---|
| <p><b>1.</b> Expresa en radianes el ángulo de:</p> <p>a. _____ grados</p> <p>b. _____ grados</p> <p>c. _____ grados</p> <p>d. _____ grados</p> | <p>a.</p> <p>b.</p> <p>c.</p> <p>d.</p> |
|--|---|

#### Pasar de radianes a grados (haz al menos cuatro ejercicios)

|  |   |
|--|---|
| <p><b>2.</b> Expresa en grados el ángulo de:</p> <p>a. _____ radianes</p> <p>b. _____ radianes</p> <p>c. _____ radianes</p> <p>d. _____ radianes</p> | <p>a.</p> <p>b.</p> <p>c.</p> <p>d.</p> |
|--|---|

### Relaciones fundamentales.

#### Razón conocida: **SENO** Calcular: **COSENO**

|  |  |
|--|--|
| <p><b>3.</b> Si <math>\alpha</math> es un ángulo del cuadrante _____ y <math>\text{sen } \alpha = \text{_____}</math>, calcula <math>\text{cos } \alpha</math></p> |  |
| <p><b>4.</b> Si <math>\alpha</math> es un ángulo del cuadrante _____ y <math>\text{sen } \alpha = \text{_____}</math>, calcula <math>\text{cos } \alpha</math></p> |  |

**Razón conocida: SENO    Calcular: TANGENTE**

|   |  |
|---|--|
| <p>5. Si <math>\alpha</math> es un ángulo del cuadrante _____ y <math>\text{sen } \alpha =</math> _____, calcula <math>\text{tg } \alpha</math></p> |  |
| <p>6. Si <math>\alpha</math> es un ángulo del cuadrante _____ y <math>\text{sen } \alpha =</math> _____, calcula <math>\text{tg } \alpha</math></p> |  |

**Razón conocida: COSENO    Calcular: SENO**

|  |  |
|--|--|
| <p>7. Si <math>\alpha</math> es un ángulo del cuadrante _____ y <math>\text{cos } \alpha =</math> _____, calcula <math>\text{sen } \alpha</math></p> |  |
| <p>8. Si <math>\alpha</math> es un ángulo del cuadrante _____ y <math>\text{cos } \alpha =</math> _____, calcula <math>\text{sen } \alpha</math></p> |  |

**Razón conocida: COSENO    Calcular: TANGENTE**

|  |  |
|--|--|
| <p>9. Si <math>\alpha</math> es un ángulo del cuadrante _____ y <math>\text{cos } \alpha =</math> _____, calcula <math>\text{tg } \alpha</math></p>  |  |
| <p>10. Si <math>\alpha</math> es un ángulo del cuadrante _____ y <math>\text{cos } \alpha =</math> _____, calcula <math>\text{tg } \alpha</math></p> |  |

**Razón conocida: TANGENTE    Calcular: SENO**

|  |  |
|--|--|
| <p>11. Si <math>\alpha</math> es un ángulo del cuadrante _____ y <math>\text{tg } \alpha =</math> _____, calcula <math>\text{sen } \alpha</math></p> |  |
| <p>12. Si <math>\alpha</math> es un ángulo del cuadrante _____ y <math>\text{tg } \alpha =</math> _____, calcula <math>\text{sen } \alpha</math></p> |  |

**Razón conocida: TANGENTE    Calcular: COSENO**

|  |  |
|--|--|
| <p><b>13.</b> Si <math>\alpha</math> es un ángulo del cuadrante _____ y <math>\text{tg } \alpha =</math> _____, calcula <math>\cos \alpha</math></p> |  |
| <p><b>14.</b> Si <math>\alpha</math> es un ángulo del cuadrante _____ y <math>\text{tg } \alpha =</math> _____, calcula <math>\cos \alpha</math></p> |  |

**Resolución de triángulos.**

**El lado de un polígono**

|  |  |
|--|--|
| <p><b>15.</b> La longitud del <b>radio</b> de un polígono regular de _____ lados es de _____. Calcula el lado.</p>     |  |
| <p><b>16.</b> La longitud de la <b>apotema</b> de un polígono regular de _____ lados es de _____. Calcula el lado.</p> |  |

**La apotema de un polígono**

|   |  |
|---|--|
| <p><b>17.</b> La longitud del <b>radio</b> de un polígono regular de _____ lados es de _____. Calcula la apotema.</p> |  |
| <p><b>18.</b> La longitud del <b>lado</b> de un polígono regular de _____ lados es de _____. Calcula la apotema.</p>  |  |

**El área de un polígono**

|  |  |
|--|--|
| <p><b>19.</b> La longitud del <b>lado</b> de un polígono regular de _____ lados es de _____. Calcula el área.</p>            |  |
| <p><b>20.</b> La longitud de la <b>apotema</b> de un polígono regular de _____ lados es de _____. Calcula la superficie.</p> |  |

**El radio de un polígono**

|   |  |
|---|--|
| <p>21. La longitud de la <b>apotema</b> de un polígono regular de ____ lados es de _____. Calcula el radio.</p> |  |
| <p>22. La longitud del <b>lado</b> de un polígono regular de ____ lados es de _____. Calcula el radio</p>       |  |

**La altura de un avión**

|   |  |
|---|--|
| <p>23. Dos personas ven un avión, que vuela sobre ellos a una altura de _____m, con ángulos de elevación de ____° y ____°. ¿A qué distancia se encuentran las dos personas?</p> |  |
|---|--|

**La altura de un árbol**

|  |  |
|--|--|
| <p>24. Determina la altura de un árbol si desde un punto situado a ____:_ de su base se observa su copa con un ángulo de _____grados</p> |  |
|--|--|

**La altura de una cometa**

|  |  |
|--|--|
| <p>25. La longitud del hilo que sujeta a una cometa es de _____m. Si el ángulo de elevación de la cometa es de ____°, ¿qué altura alcanza la cometa?</p> |  |
|--|--|

**La altura de un edificio**

|  |  |
|--|--|
| <p>26. Para medir la altura de un edificio se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes _____m. ¿Cuál es la altura si los ángulos son ____° y ____°?</p> |  |
|--|--|

**La altura de una montaña**

|   |  |
|---|--|
| <p>27. Para medir la altura de una montaña se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes _____m y situados a _____m sobre el nivel del mar. ¿Cuál es la altura si los ángulos son ____° y ____°?</p> |  |
|---|--|

## Autoevaluación



**Completa aquí cada uno de los enunciados que van apareciendo en el ordenador y resuélvelo, después introduce el resultado para comprobar si la solución es correcta.**

|  |  |
|--|--|
| <p><b>1</b> Expresa en radianes el ángulo de la figura<br/>_____</p>   |  |
| <p><b>2</b> Calcula el valor de <math>\text{tg } A</math> en el triángulo ABC de la figura:</p>  |  |
| <p><b>3</b> Calcula el área del triángulo de la figura.</p>  |  |
| <p><b>4</b> Con un compás de _____ de longitud hemos trazado una circunferencia de _____ cm de radio, ¿qué ángulo, en radianes, forman las ramas del compás?</p> |  |
| <p><b>5</b> Si <math>\text{sen } \alpha =</math> _____, y <math>\alpha</math> es un ángulo _____, calcula la <math>\text{tg } \alpha</math>.</p>                 |  |
| <p><b>6</b> Si <math>\text{tg } \alpha =</math> _____ y <math>\alpha</math> está en el _____ cuadrante, calcula el <math>\text{cos } \alpha</math>.</p>          |  |
| <p><b>7</b> A partir de las razones del ángulo de _____, calcula _____ del ángulo de _____.</p>  |  |
| <p><b>8</b> Si <math>\text{cos } \alpha =</math> _____, y <math>\alpha</math> es un ángulo _____, calcula el _____.</p>  |  |
| <p><b>9</b> La altura de Torre España es de 231 m, ¿cuánto mide su sombra cuando la inclinación de los rayos del sol es de _____?</p>                            |  |
| <p><b>10</b> Calcula el área del polígono regular de la figura</p>   |  |



## Para practicar más

- Expresa en radianes:
  - $15^\circ$
  - $120^\circ$
  - $240^\circ$
  - $345^\circ$
- Expresa en grados:
  - $\frac{\pi}{15}$
  - $\frac{3\pi}{10}$
  - $\frac{7\pi}{12}$
  - $\frac{11\pi}{6}$
- Halla con la calculadora las siguientes razones trigonométricas redondeando a las centésimas:
  - $\sin 25^\circ$
  - $\cos 67^\circ$
  - $\operatorname{tg} 225^\circ$
  - $\operatorname{tg} 150^\circ$
- Un ángulo de un triángulo rectángulo mide  $47^\circ$  y el cateto opuesto 8 cm, halla la hipotenusa.
- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 cm y un ángulo  $66^\circ$ . Calcula los catetos.
- Un ángulo de un triángulo rectángulo mide  $44^\circ$  y el cateto adyacente 16 cm, calcula el otro cateto.
- En un triángulo rectángulo los catetos miden 15 y 8 cm, halla los ángulos agudos.
- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 45 cm y un cateto 27 cm, calcula los ángulos agudos.
- En un triángulo isósceles los ángulos iguales miden  $78^\circ$  y la altura 28 cm, halla el lado desigual
- Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 41 cm y los ángulos iguales  $72^\circ$ , calcula el otro lado.
- El cos de un ángulo agudo es  $3/4$ , calcula el seno del ángulo.
- La tangente de un ángulo agudo es  $12/5$  calcula el seno.
- El  $\sin \alpha = 3/5$  y  $\alpha$  es un ángulo del segundo cuadrante, calcula la  $\operatorname{tg} \alpha$ .
- El  $\cos \alpha = 3/5$  y  $\alpha$  es un ángulo del cuarto cuadrante, calcula la  $\operatorname{tg} \alpha$ .
- La  $\operatorname{tg} \alpha = 3$  y  $\alpha$  es un ángulo del tercer cuadrante, calcula el  $\cos \alpha$ .
- La apotema de un polígono regular de 9 lados mide 15 cm, calcula el lado.
- El lado de un exágono regular mide 30 cm, calcula la apotema.
- La apotema de un octógono regular mide 30 cm, calcula el área del polígono.
- La longitud del radio de un pentágono regular es 15 cm. Calcula el área.
- La sombra de un árbol cuando los rayos del sol forman con la horizontal un ángulo de  $36^\circ$ , mide 11 m. ¿Cuál es la altura del árbol?.
- El hilo de una cometa mide 50 m de largo y forma con la horizontal un ángulo de  $37^\circ$ , ¿a qué altura vuela la cometa?
- Para medir la altura de un edificio se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes 100 m. ¿Cuál es la altura si los ángulos son  $33^\circ$  y  $46^\circ$ ?
- Dos personas distantes entre sí 840 m, ven simultáneamente un avión con ángulos de elevación respectivos de  $60^\circ$  y  $47^\circ$ , ¿a qué altura vuela el avión?
- Para medir la altura de una montaña se miden ángulos de elevación desde dos puntos distantes 480 m y situados a 1200 m sobre el nivel del mar. ¿Cuál es la altura si los ángulos son de  $45^\circ$  y  $76^\circ$ ?

