

Helburuak

Hamabostaldi honetan hauxe ikasiko duzu:

- Grafiko zuzena duten funtzio mota desberdinak bereizten eta horiekin lan egiten.
- Zuzen baten malda eta haren hazkuntzarekiko erlazioa zehazten.
- Emandako bi puntuetatik igarotzen den zuzen baten ekuazioa kalkulatzeko.
- Bigarren mailako edozein funtzio polinomikoren grafikoa ezagutzen.
- Bigarren mailako funtzio polinomiko bat grafikoki irudikatzen $y=ax^2+bx+c$.
- Bigarren mailako funtzio baten hazkuntza edo txikitzea zehazten eta haren maximoa edo minimoa aurkitzen.

Hasi baino lehen.

1. Funtzio polinomikoakorria 150
Ezaugarriak

2. Lehen mailako funtzioakorria 151
Gai independentea
Lehen mailako koefizientea
Bi puntuetatik igarotzen den zuzena
Aplikazioak

3. Bigarren mailako funtzioakorria 154
Parabola $y=x^2$
Parabola baten translazioak
Funtzio koadratikoak irudikatzea
Aplikazioak

Praktikatzeko ariketak

Gehiago jakiteko

Laburpena

Autoebaluazioa

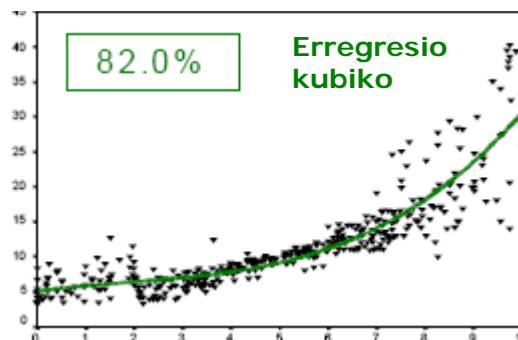
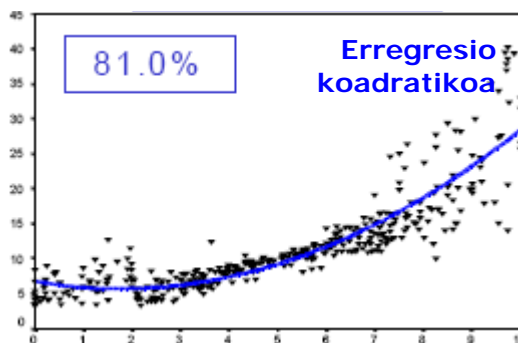
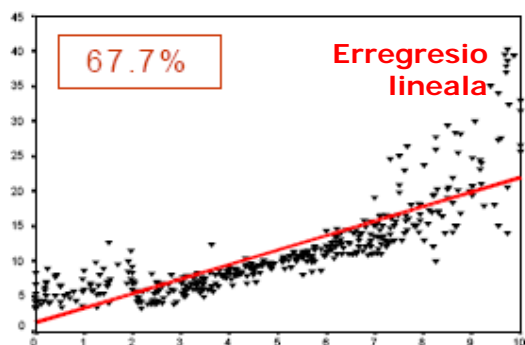
Tutoreari bidaltzeko jarduerak



Zertarako dira funtzio polinomikoak?

Esperimentu bateko datuak biltzen direnean, aztertu beharreko puntu-pilo bat lortzen da. Irudian ikus daitekeenez, programa batek hainbat funtzio polinomikotara (*erregresio-kurbak*) doitzen du puntu-pilo hori eta kasuan kasuko doikuntzaren egokitasuna adierazten du.

Hainbat motatako grafikoak:
<http://eio.usc.es/eipc1/MATERIALES/311121873.pdf>



Funtzio polinomikoak

1. Funtzio polinomikoak

Ezaugarriak

Funtzio polinomikoak adierazpentzat polinomio bat dutenak dira, adibidez:

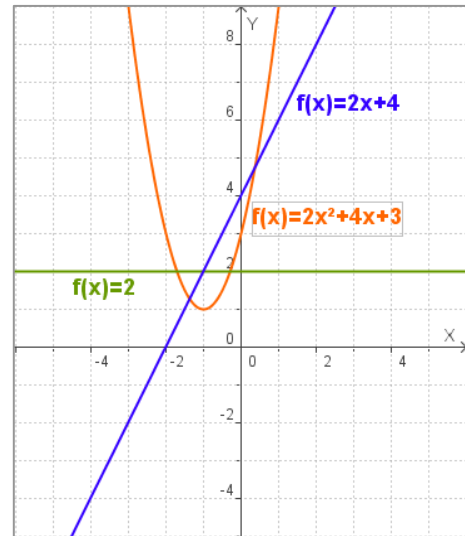
$$f(x) = 3x^4 - 5x + 6$$

Funtzio jarraiak dira, haien eremua zenbaki errealen multzoa izanik.

Irudian, 3 baino maila txikiagoko funtzio polinomikoen grafikoak ikus daitezke. Horiek ikasiko ditugu hamabostaldi honetan.

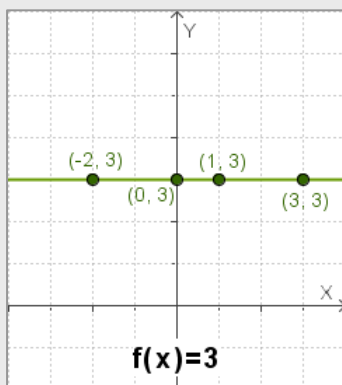
Ikus ezazu bere forma mailaren arabera:

- ✓ zero mailakoak, esaterako, $f(x) = 2$, zuzen horizontalak dira;
- ✓ lehen mailakoak, besteak beste, $f(x) = 2x + 4$, zuzen zeiharrak dira;
- ✓ bigarren mailakoak, adibidez, $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$, parabolak dira eta bere ardatza ordenatuekiko paraleloa da.

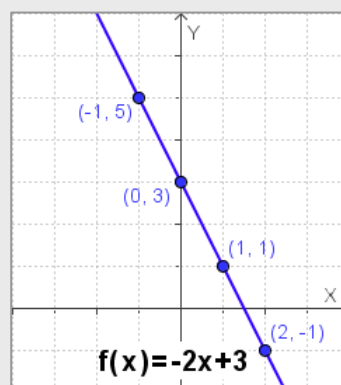


Ebatzitako ARIKETAK

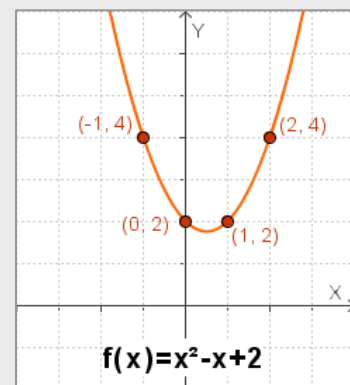
1. Kasuan kasu balioen taula dago. Egiazta ezazu lortutako puntuak grafikokoak direla.



x	f(x)
0	3
1	3
2	3
-2	3



x	f(x)
0	3
1	1
2	-1
-1	5



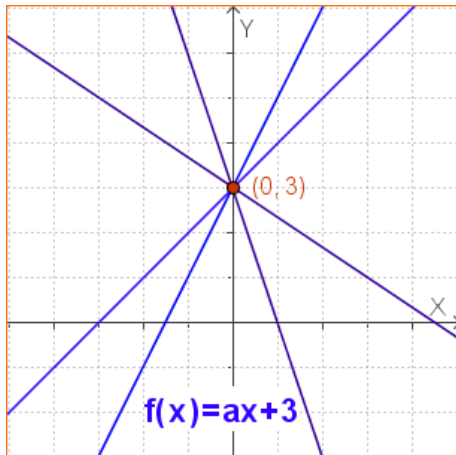
x	f(x)
0	2
1	2
2	4
-1	4

2. Lehen mailako funtzioak

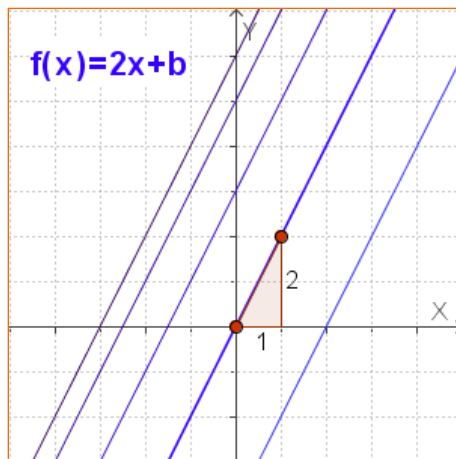
Gai independentea

$f(x)$ edozein funtziotan, bere grafikoaren ebakidura y ardatzarekin edo ordenatuen ardatzarekin, $(0, f(0))$ puntua da; beraz, bere balioak zeroan definitzen du ordenatuen ardatzarekiko ebakidura.

Funtzio polinomikoen kasuan $f(0)$ bat dator zero mailako koefizientearekin edo funtzioaren **termino independentearekin**, beraz, adierazpena ikusi bezain laster ezagutuko dugu bere grafikoaren puntu bat, ordenatuen ardatzako ebakidura



✓ $f(x) = ax + b$ funtzioaren grafikoak OY ardatza ebakitzen du b puntuan



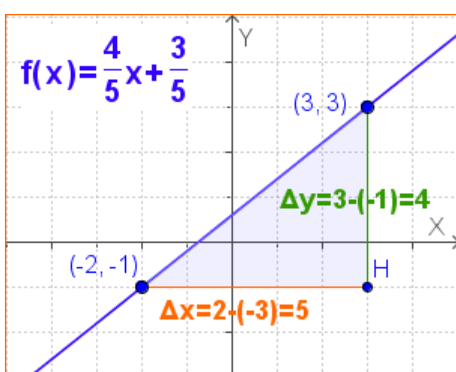
Malda

Erraza da ikustea funtzio hauetan x -en koefizientea aldatzean, zuzenaren inklinazioa aldatzen dela, eta hori zuzenak abzisen ardatzean sortzen duen angeluaren tangenteaz neurtzen da, hau da, zuzenaren **malda**.

✓ $f(x) = ax + b$ zuzenaren malda a da

Begira ezazu a positiboa denean funtzioa gorakorra dela eta negatiboa denean beherakorra.

Horrela, koefizienteak ikusita, badakigu nolakoa den funtzioaren grafikoa kalkulurik egin behar gabe.



Bi puntutatik igarotzen den zuzena

Zuzen bat marrazteko, nahikoa da **bi** puntu ematea, beraz, lehen mailako funtzio polinomikoa irudikatzeko, balioak emanez, nahikoa izango da **bi** balio ematea.

Bi puntuk $P(3, 3)$ eta $Q(-2, -1)$ zuzen bat definitzen badute, haren ekuazioa ere zehaztuko dute, sistema bat ebatziz aurkituko duguna:

$y = ax + b$ zuzenaren ekuazioa

$$\left. \begin{array}{l} P \text{ puntutik igarotzen da: } 3a + b = 3 \\ Q \text{ puntutik igarotzen da: } -2a + b = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow 5a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{5} \quad b = \frac{3}{5}$$

$P(x_0, y_0)$ eta $Q(x_1, y_1)$ bi puntu izanik, horietatik igarotzen den zuzenaren malda honakoa da:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

o malda $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ konstantea da

Beraz, bi puntutatik (x_0, y_0) (x_1, y_1) igarotzen den zuzenaren ekuazioa ondokoa da:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

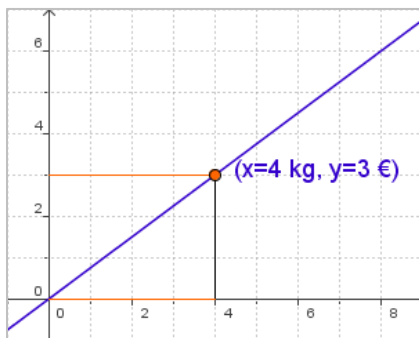
Funtzio polinomikoak

Aplikazioak

Ikus ditzagun lehen mailako funtzio polinomikoak aplikatzearen inguruko zenbait adibide.

1) Proporzionaltasuna zuzeneko funtzioak

Zero ermino independentea duten lehen mailako funtzio polinomikoek zuzenki proporzionalak diren bi aldagaien arteko erlazioa irudikatzen dute.



$$y = \text{konstantea} \cdot x$$

Proporzionaltasun zuzeneko funtzioaren grafikoa jatorritik igarotzen den zuzena da eta bere malda proporzionaltasun-konstantea da

Zenbat ordainduko dugu?

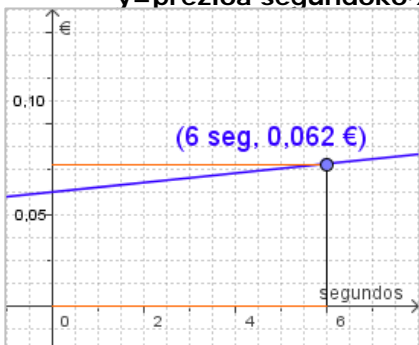
X: erosten ditugun naranja kiloak
f(x): ordaintzen den prezioa eurotan



2) Telefono tarifa segundoko

Telefono-dei baten prezioa kalkulatzeko lehen mailako funtzio polinomikoak erabiltzen dira.

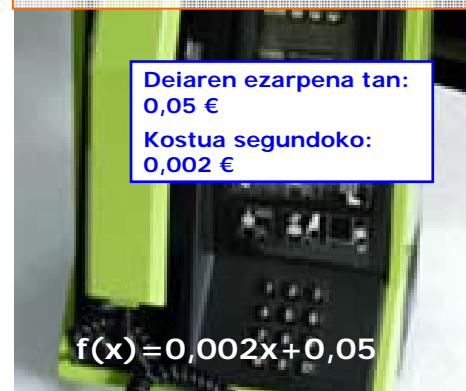
$$y = \text{prezioa segundoko} \cdot x + \text{dei ezarpena}$$



x seg	f(x) €
0	0,05
1	0,052
10	0,07
60	0,17

Dei baten prezioa honakoa da:

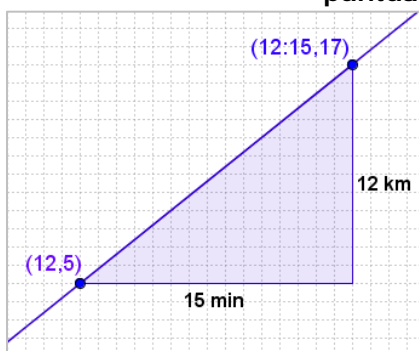
X: deiak irauten dituen segundokoak
f(x): deiaren prezio eurotan



3) Abiadura konstantea duen ibilbidea

12:00etan errepide bateko 5. kilometroan baldin banago eta, abiadura konstantearekin eutsiz, 12:15ean 15. kilometroan baldin banago, zer abiadura daramat?

$$\text{Kilometro-putua} = \text{abiadura} \cdot t + \text{hasierako kilometro-puntua}$$



Abiadura (12,5) eta (12:15, 15) puntuetatik igarotzen den zuzenaren malda da

$$\begin{aligned} \text{vel} &= \frac{17 - 5}{15} = \frac{12 \text{ km}}{15 \text{ min}} = \\ &= \frac{12 \cdot 60}{15} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 48 \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{aligned}$$

Zer abiaduran?

t: igarotako denbora
f(t): kilometro-puntua

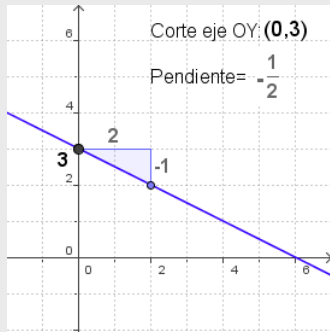


Ebatzitako ARIKETAK

2. Irudika ezazu $f(x)$ funtzioaren grafikoa:

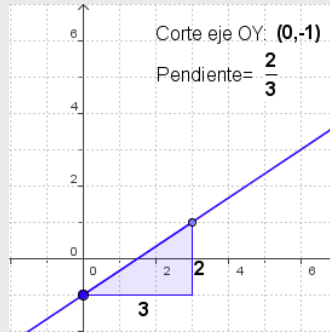
a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

0 mailako koefizientea: **3**
1 mailako koefizientea: **-1/2**



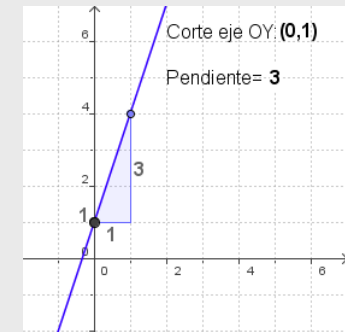
b) $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$

0 mailako koefizientea: **-1**
1 mailako koefizientea: **2/3**

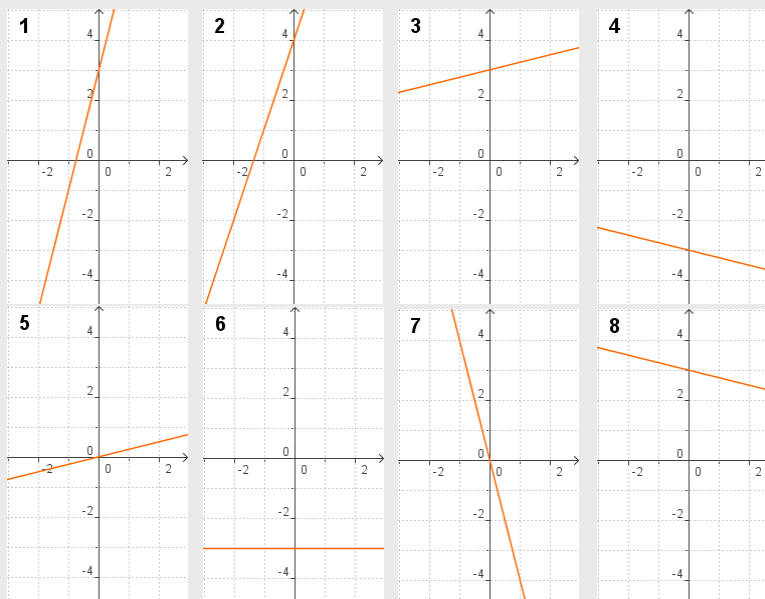


c) $f(x) = 3x + 1$

0 mailako koefizientea: **1**
1 mailako koefizientea: **3**



3. Zer grafiko dagokio ekuazio bakoitzari?

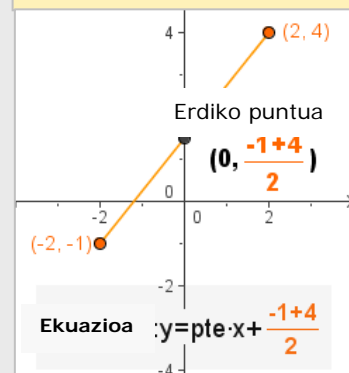


- a) $y = x/4 + 3 \rightarrow 3$
- b) $y = 4x + 3 \rightarrow 1$
- c) $y = -x/4 - 3 \rightarrow 4$
- d) $y = -x/4 + 3 \rightarrow 8$
- e) $y = -3 \rightarrow 6$
- f) $y = 3x + 4 \rightarrow 2$
- g) $y = x/4 \rightarrow 5$
- h) $y = -4x \rightarrow 7$

4. Zer ekuazio dagokio adierazitako puntuetatik igarotzen den zuzenari?

- | | | |
|---------------|-----------|---------------------------------|
| 1) (-1, 5) | (1, -5) | a) $y = x/5 + 3 \rightarrow 2$ |
| 2) (-2, 2,6) | (2, 3,4) | b) $y = 5x + 3 \rightarrow 6$ |
| 3) (-2, -0,4) | (2, 0,4) | c) $y = -x/5 - 3 \rightarrow 5$ |
| 4) (-2, 3,4) | (2, 2,6) | d) $y = -x/5 - 3 \rightarrow 4$ |
| 5) (-2, -2,6) | (2, -3,4) | e) $y = -3 \rightarrow 8$ |
| 6) (-1, -2) | (1, 8) | f) $y = 3x + 5 \rightarrow 7$ |
| 7) (-1, 2) | (1, 8) | g) $y = x/5 \rightarrow 3$ |
| 8) (-1, -3) | (1, -3) | h) $y = -5x \rightarrow 1$ |

Abzisen balio absolutua bera denean, OY ardatzarekiko ebakidura **erdiko puntuak** zehazten du.



Funtzio polinomikoak

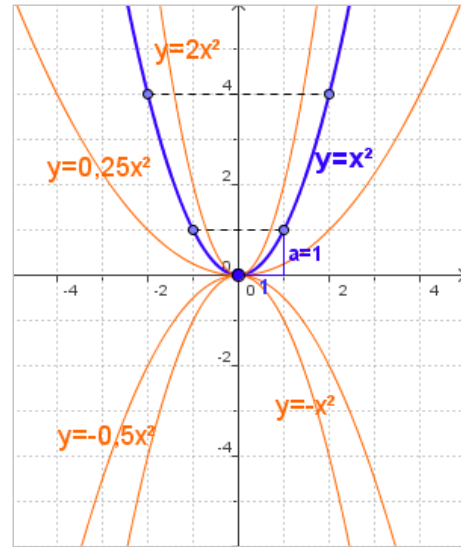
3. Bigarren mailako funtzioak

Bigarren mailako funtzio polinomikoen grafikoa ardatz bertikaleko parabola da.

$y=ax^2$ parabola

Begira ezazu irudian nola eraikitzen den $f(x)=a \cdot x^2$ funtzioaren grafikoa eta nola aldatzen den balioak eta a -ren zeinua aldatuz gero.

- ✓ OX ardatzarekiko simetrikoa da.
- ✓ a -ren zeinuak grafikoen ahurtasuna zehazten du.
 - $a > 0$ bada, **minimoa** du (0,0) puntuan
 - $a < 0$ bada, **maximoa** du (0,0) puntuan

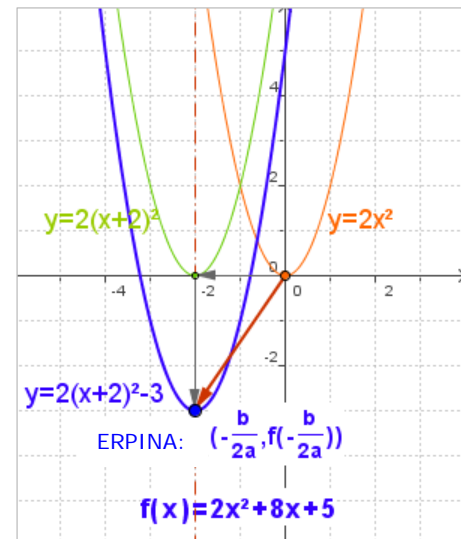


Parabola baten translazioak

Irudian $f(x)=ax^2+bx+c$ funtzioaren grafikoa ikus dezakegu b eta c koefizienteen balioak aldatzean, grafikoen forma ez dela aldatzen ikus daiteke; lekualdatu baino ez da egiten. Hala, $y=f(x)$ funtzioaren grafikoa eta lekualdatutako $y=ax^2$ funtzioaren forma bera dute:

- ✓ $-\frac{b}{2a}$ unitateak **horizontalean** $\rightarrow y = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2$
eskuinalderantz $-b/(2a) > 0$ baldin bada, ezkerralderantz, $-b/(2a) < 0$ denean
- ✓ $c - \frac{b^2}{4a}$ o $f(-\frac{b}{2a})$ **bertikalean** $\rightarrow y = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$
gorantz $f(-b/(2a)) > 0$ baldin bada, beherantz $f(-b/(2a)) < 0$ denean.

- Simetria-ardatza $x = -b/(2a)$ da
- Parabolaren **erpina**, maximoa edo minimoa $(-b/(2a), f(-b/(2a)))$



Funtzio koadratikoak irudikatzea

Bigarren mailako funtzio bat irudikatzeko

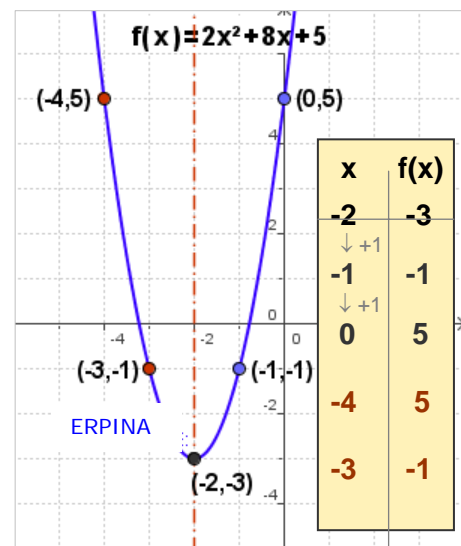
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

lehenik eta behin erpina jarriko dugu: $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$

Simetria-ardatza marraztuko dugu eta, ondoren, balioen taula egingo dugu. Bertan, aldi bakoitzean unitate bat gehituko dugu x -ren balioa. Puntu batzuk lortzen ditugunean, simetrikoak marraztuko ditugu.

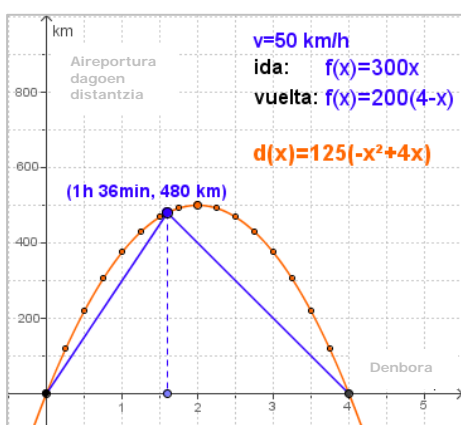
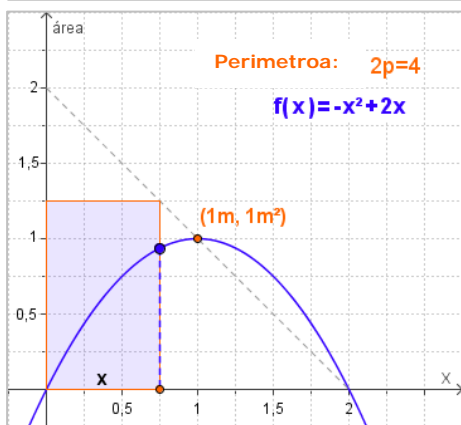
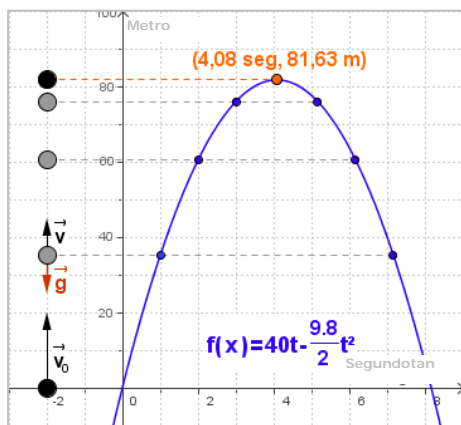
Beste irudikapen grafikotan bezala, interesgarria da ardatzekiko ebakidura puntuak aurkitzea,

- **OY** ardatzarekiko ebakidura c da
- **OX** ardatzarekiko ebakidurak $ax^2+bx+c=0$ ekuazioaren ebazpenak dira



Funtzio polinomikoak

Aplikazioak



Bigarren mailako funtzio polinomikoen bidez zenbait egoera azter daitezke, mundu fisikoan eta bizitza errealean.

Gainera, parabolaren erpina maximo edo minimo erlatiboa da eta, era berean, dagokion funtzio koadratikoaren absolutua; minimoa ganbila bada (gorantz) edo maximoa ahurra bada (beherantz).

Orduan, funtzio horien mutur erlatiboak kalkulatzeko, nahikoa da erpinaren koordinatuak kalkulatzea, ondorengo adibideetan ikus dezakezun bezala.

1) Uniformeki azeleratutako mugimendua

Uniformeki azeleratutako mugimendu edo azelerazio konstatearen adibide bat **erorketa askea** da; bertan parte hartzen du grabitatearen azelerazioak.

Mugimendu hauen ekuazioak honako hauek dira:

$$v = v_0 + gt \quad e = v_0t + \frac{1}{2}gt^2 \quad v_0: \text{hasierako abiad.} \quad g \cong 9.8 \text{ m/seg}^2$$

- Objektu bat lurretik gorantz jaurtitzen da, 40 m/seg-ko hasierako abiadurarekin. Zer altuerara iristen da?

$$f(x) = v_0x - 4,9x^2 \quad x: \text{denbora} \quad g \cong -9.8 \text{ m/seg}^2$$

$(v_0/g, f(v_0/g))$ erpina duen parabola da. Hortaz, gehienez ondorengo altuerara iritsiko da: $f(v_0/g)$ m.

2) Azalera maximoko laukizuzena

Perimetro berarekin, angeluzuzen ezberdinak eraiki daitezke. Horien guztien artean, gehieneko azalera duena aurkitu nahi dugu.

- $2p$ m perimetroa duten angeluzuzen guztien artean, zer neurri ditu gehieneko azalerakoak?

$$\text{Perimetroa} = 2p \quad \text{oinarria} = x \quad \text{altuera} = 2-x$$

$$\text{Azalera} = \text{oinarria} \cdot \text{altuera} \quad f(x) = x \cdot (p-x) \quad f(x) = -x^2 + px$$

$(p/2, (p/2)^2)$ erpina duen parabola da. Hortaz, $p/2$ m aldea duen karratua da.

3) Atzerabiderik gabeko puntua

Hegazkin batek 4 ordurako erregaia du, betiere, 250 km/h-ko abiadura konstantean joaten bada eta haizerik ez badago. Aireratzekoan pilotuak v km/h-ko aldeko haizea dagoela ikusten du. Zer distantzia egin dezake gehienez itzultzeko erregai nahikoa izatearen segurtasunarekin?

Joaterakoan duen abiadura: $250+v$

$$\text{Aireportura dagoen distantzia: } f(x) = (250+v)x$$

Itzultzekoan duen abiadura: $250-v$

$$\text{Aireportura dagoen distantzia: } f(x) = (250-v)(4-x)$$

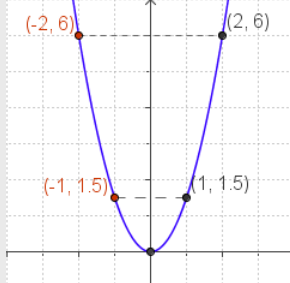
Bi zuzenek elkar ebakitzen duten puntua itzultzeko aukerarik gabeko puntua da; pilotua haratago joaten bada, ez du itzultzeko erregai nahikorik izango.

Haizearen abiadura aldatzean, itzultzeko aukerarik gabeko puntuak parabolaren daude: $d(x) = 125x(4-x)$

Ebatzitako ARIKETAK

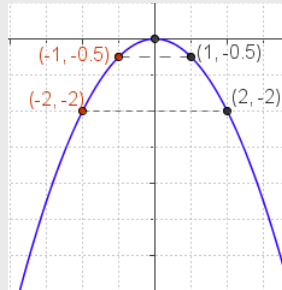
5. Marraz ezazu ondorengo funtzioen grafikoa:

a) $f(x) = 1,5x^2$



(0,0) erpina
 $x=1 \quad f(1)=1,5$
 $x=2 \quad f(2)=6$
 OY ardatzarekiko haren simetrikoak:
 (-1, 1,5)
 (-2, 6)

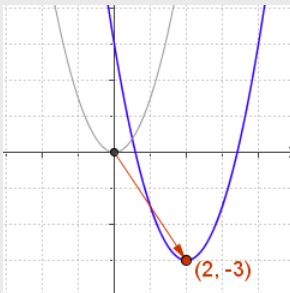
b) $f(x) = -0,5x^2$



(0,0) erpina
 $x=1 \quad f(1)=-0,5$
 $x=2 \quad f(2)=-2$
 OY ardatzarekiko haren simetrikoak:
 (-1, 0,5)
 (-2, -2)

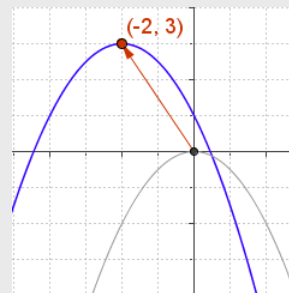
6. Idatz ezazu parabolaren erpina adierazitako puntura lekualdatzean ematen duen funtzioaren ekuazioa.

a) $y = 1,5x^2$ a $A(2, -3)$



(2,-3) erpina
 $\rightarrow 2$ unitate eskuinaldera:
 $y = 1,5(x-2)^2$
 $\downarrow 3$ unitate behealdera
 $y = 1,5(x-2)^2 - 3$
 $y = 1,5x^2 - 6x + 3$

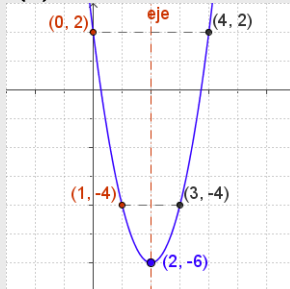
b) $y = -0,5x^2$ a $B(-2, 3)$



(-2,3) erpina
 $\leftarrow 2$ unitate ezkerretara:
 $y = -0,5(x+2)^2$
 $\uparrow 3$ unitate gorantz
 $y = -0,5(x+2)^2 + 3$
 $y = -0,5x^2 - 2x + 1$

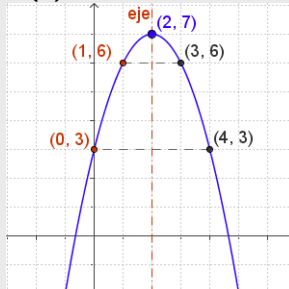
7. Irudika itzazu grafikoki ondorengo parabolak

a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 2$



(2, -6) erpina
 Ardatza : $x=2$
 $x=3 \quad f(3)=-4$
 $x=4 \quad f(4)=2$
 ardatzarekiko bere simetrikoak:
 (1, -4)
 (0, 2)

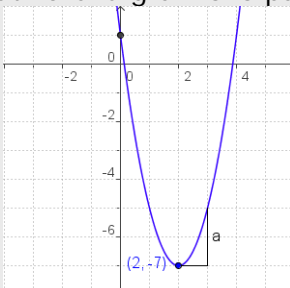
b) $f(x) = -x^2 + 4x + 3$



(2, 7) erpina
 Ardatza : $x=2$
 $x=3 \quad f(3)=6$
 $x=4 \quad f(4)=3$
 ardatzarekiko bere simetrikoak:
 (1, 6)
 (0, 3)

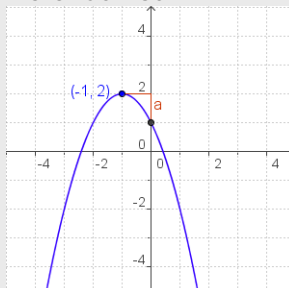
8. Idatz ezazu grafikoko parabolaren $y = ax^2 + bx + c$ ekuazioa:

a)



a=2
 (2, -7) erpina
 $2 = -b/4 \Rightarrow \mathbf{b=-8}$
 OY 1 puntuan ebakitzen da eta, beraz, **c=1**
 $\mathbf{y=2x^2-8x+1}$

b)

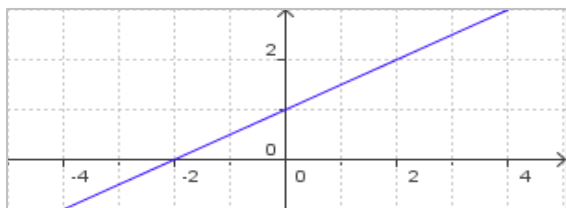


a=-1
 (-1, 2) erpina
 $-1 = -b/(-2) \Rightarrow \mathbf{b=-2}$
 OY 1 puntuan ebakitzen da eta, beraz, **c=1**
 $\mathbf{y=-x^2-2x+1}$



Praktikatzekeo

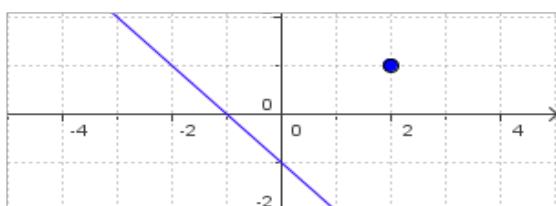
1. Idatz ezazu zaldi baten pisua irudikatzen duen funtzioaren ekuazioa, zaldia 30 kg-rekin jaiotzen bada eta 2 egunez behin 1 kg hartzen badu.
2. Idatz ezazu ziberkafe batean konexioa amaitzean ordaindu beharreko prezioari dagokion funtzioaren ekuazioa, konexioa ezartzea 0,10 € kostatzen bada eta minutu bakoitzak 0,03 € balio badu.
3. Idatz ezazu irakurtzen ari naizen liburuko orrialdearen zenbakiari dagokion funtzioaren ekuazioa, egunero orrialde-kopuru bera irakurtzen dudala jakinik eta 10. egunean 290. orrialdean eta 17. egunean 465. orrialdean nindoala kontuan hartuta.
4. Idatz ezazu faktura batean ordaindu beharreko guztizko kopurua, €-tan eta BEZ barne, irudikatzen den funtzioaren ekuazioa, aplikatutako gehikuntza-portzentajea % 16koa dela jakinik.
5. Idatz ezazu grafikoko funtzioaren ekuazioa. Zehatz itzazu zuzenaren malda eta ardatzekiko ebakidurak.



6. Irudika itzazu grafikoki ondorengo funtzioak:

a) $f(x) = x - 1$ b) $f(x) = \frac{4}{3}x + 2$

7. Aurki ezazu grafikorekiko paraleloa den eta (2,1) puntutik igarotzen den zuzenaren ekuazioa



8. Aurki ezazu $y = 2x + 1$ funtzioarekiko paraleloa den eta (-1,5) puntutik igarotzen den zuzenaren ekuazioa
9. Aurki ezazu honako puntuetatik igarotzen den zuzenaren ekuazioa:
 - a) (0,70) (-7, 8)
 - b) (0,2) (-1,0)
10. Aurki ezazu 4 malda duen eta abzisen ardatza -10 puntuan ebakitzen duen zuzenaren ekuazioa.
11. Aurki ezazu 5 malda duen eta ordenatuen ardatza 15 puntuan ebakitzen duen zuzenaren ekuazioa.
12. Hiru puntuak lerrokatuta al daude?
 - a) (0, 4) (2, 10) y (3, 11)
 - b) (3, 36) (5, 54) y (9, 90)
13. Juanek 160 minutuko telefono-faktura jasotzen du hilero. Erabaki ezazu zer tarifa komeni zaion gehien:
 - a) 10 €-ko kuota hilean, gehi 5 zentimo minutu bakoitzeko.
 - b) Hileko kuotarik gabe eta 12 zentimo minutu bakoitzeko.
14. Konpainia jakin batek beheratutako mugikorra eskaintzen du, lortutako puntuen arabera, taulak adierazten duen bezala. Taula hori bat al dator lehen mailako funtzio polinomikoarekin? Hala bada, zein da ekuazioa?

Puntuak (x):	3.000	5.000	6.000
Prezioa, €-tan (y):	220	200	190
15. Telefonoaren fakturan ikus dezakegunez, 2 minutuko dei batek 0,26 €-ko kostua du eta 5 minutuko beste batek 0,44 €-koa. Zein da deia ezartzearen prezioa? Zenbat ordainduko da 9 minutuko dei bat eginez gero?
16. Kalkula ezazu b-ren balioa $f(x) = 2x^2 + bx - 4$ funtzioaren grafikoa (-3,2) puntutik igaro dadin.

Funtzio polinomikoak

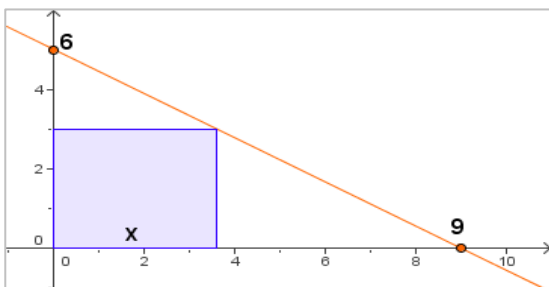
17. Kalkula ezazu a-ren balioa $f(x)=ax^2-5x-2$ funtzioaren grafikoa $(-0,5, 1)$ puntutik igaro dadin.
18. Kalkula ezazu c-ren balioa $f(x)=-2x^2+3x+c$ funtzioaren grafikoa $(2, 1)$ puntutik igaro dadin.
19. Idatz ezazu $a=-2$ koefizientea duen, ordenatuen ardatza $(0, 2)$ puntuan ebakitzen duen eta erpina $(-1, 4)$ puntuan duen parabolaren ekuazioa.
20. Idatz ezazu $a=1$ koefizientea duen, ordenatuen ardatza $(0, -3)$ puntuan ebakitzen duen eta erpina $(-2, -7)$ puntuan duen parabolaren ekuazioa.
21. Idatz ezazu $A(0, 5)$, $B(4, 21)$ eta $C(-1, 11)$ puntuetatik igarotzen den parabolaren ekuazioa

22. Objektu bat gorantz bertikalki jaurtitzerakoan, 24 m/sg-ko hasierako abiadurarekin, hartuko duen gehieneko altuera honela kalkula daiteke: $f(x)=24x-5x^2$ ($g=10$ m/seg² y x:denbora). Kalkula ezazu har dezakeen gehieneko altuera.

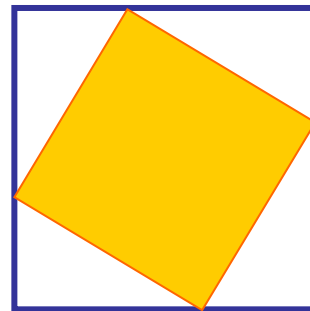
23. 194 cm-ko luzera duen listoi batekin koadro baterako markoa egin nahi dugu. Kalkula ezazu markoan sar daiteken gehieneko azalera.

24. Denda batean produktu baten 144 unitate saltzen dituzte, bakoitza 12 €-ren truke. Badakigu prezioa garestitzen den euro bakoitzeko 3 unitate gutxiago saltzen direla. Zenbatean saldu behar dira etekinik handiena lortzeko?

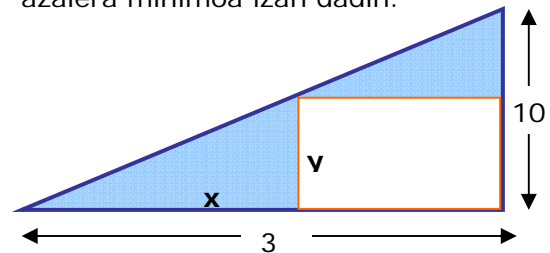
25. Kalkula ezazu x-ren balioa irudiko angeluzuzenaren azalera maximoa izan dadin



26. Bi zenbaki batuta emaitza 24 da. Kalkula ezazu zeintzuk diren beren karratuen batura minimoa bada.
27. 20 cm-ko aldea duen karratu batean beste bat inskribatzen da, irudian ageri den bezala. Zenbat neurtuko du inskribatutako karratuaren aldeak bere azalera minimoa izan dadin?



28. Kalkula ezazu x-k neurtu behar duena irudian urdinez margotuta dagoen azalera minimoa izan dadin.

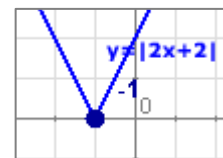


29. Erabaki ezazu $f(x)$ funtzioa jarraia den

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 3x + 4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

30. Funtzio baten balio absolutuaren grafikoa marrazteko, funtzioaren grafikoaren simetria egin behar da, X ardatzarekiko, horren azpitik dagoen zatia kontuan hartuta. Irudika ezazu grafikoki $f(x)=|x^2-6x+8|$ funtzioa

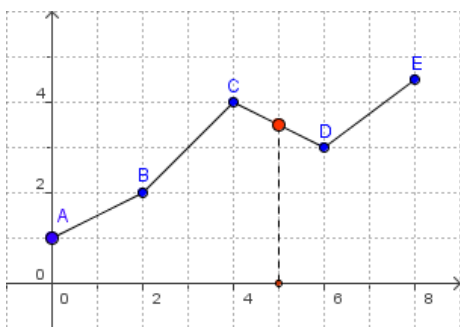
31. Funtzio polinomiko baten balio absolutua zatika definitutako funtzio gisa adieraz daiteke. Zati bakoitza polinomio bat da. Adieraz ezazu funtzio polinomikoetako zatietan $f(x)=|2x+2|$ funtzioa.





Interpolazio

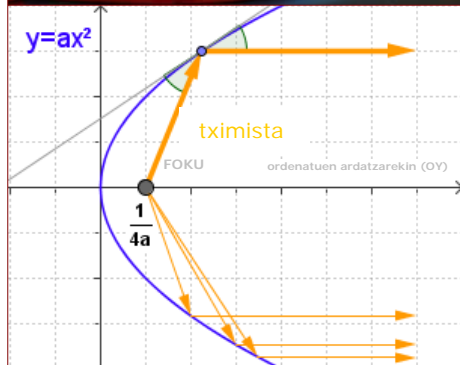
Fenomeno bat aztertzean, datu multzoa lortzen da, aldagai dependentek zer egingo lukeen jakiteko, **interpolazio** prozesu batera jo ohi da, honek behatutako datu multzoa hartuta, funtzio ezezagun batek gutxi gorabehera hartzen duen balioa ezagutzen baimentzen du.



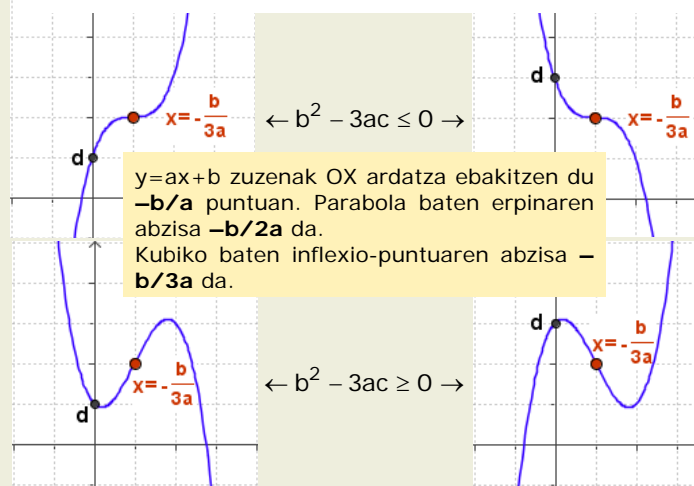
Modurik errazena **interpolazio lineal** deritzona da. Bertan, funtzioa zatikako funtzio linealaren bidez hurbiltzen da, irudian ikus daitekeen bezala.

Zuzenak erabili ordez parabolak erabiltzen baditugu, interpolazio koadratikoaz hitz egiten da eta, oro har, interpolazio polinomikoaz.

Paraboletan, **fokutik** abiatzen diren edo bertan eragina duten izpi guztiak norantza berean islatzen dira. Horregatik dute autoetako argiek edo antenek parabola-itxura.



Hirugarren mailakoa: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$



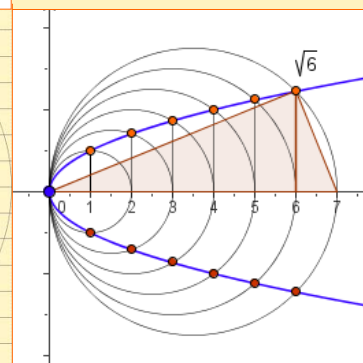
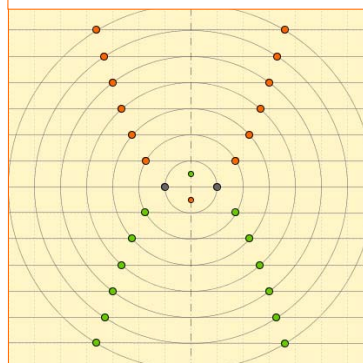
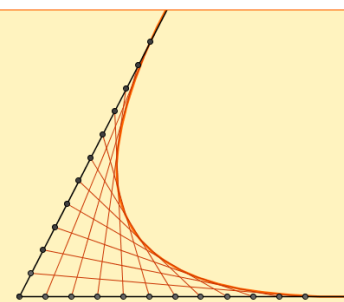
$$f(x) = x^2 + 2x + 4$$

$f(x)$ funtzioaren ondoko ondoko balioak kentzean lortzen diren aldeek $f(x) = 2ax + (b-a)$ funtzioari dagokion balioen taula ematen digute eta bertako aldeek $2a$ funtzio konstantea.

x	f(x)	Desberdint asunak	Desberdint asunak
0	4		
1	7	3	
2	12	5	2
3	19	7	2
4	28	9	2
5	39	11	2
6	52	13	2
7	67	15	2

Parabolak marrazteko beste modu batzuk

Zirkunferentzia kontzentrikoen eta zuzen paraleloen bidez; bi erdizuzenen gainean tarte erregularretan marraztutako puntuak lotuta edo Altueraren Teorema aplikatuta, parabolak lortzeko modu ezberdinak dira.

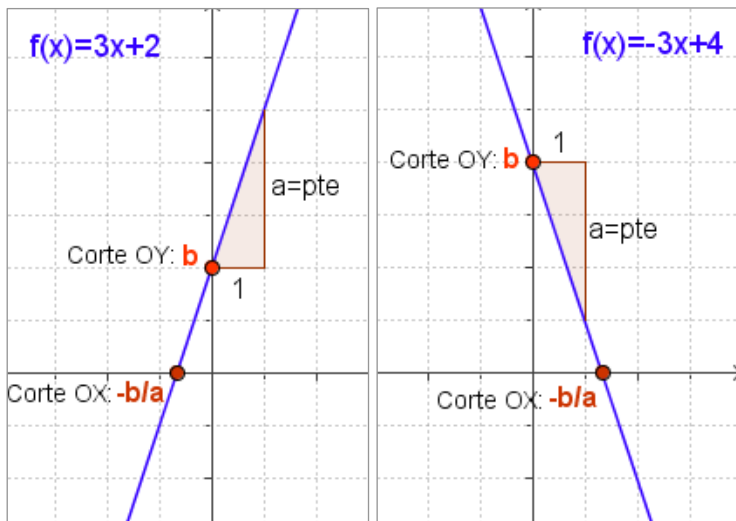


Ekuazioak eta sistemak



Gogoratu garrantzitsuenak

Lehen mailako funtzioak, zuzenak.



$f(x)=ax+b$

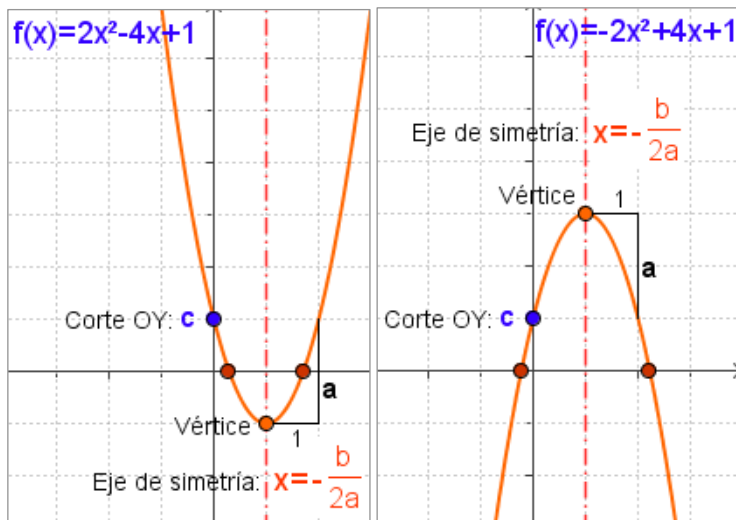
Lehen mailako funtzio polinomikoen grafikoa zuzena da.

- ✓ **a** malda da
 - $a > 0$ bada, gorakorra.
 - $a < 0$ bada, beherakorra.
- ✓ OY ardatzarekiko ebakidura: **b**
- ✓ OX ardatzarekiko ebakidura: **$-b/a$**

Bi puntutatik igarotzen den zuzena:

$$\begin{matrix} (x_0, y_0) & (x_1, y_1) \\ \frac{y - y_0}{x - x_0} = & \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \end{matrix}$$

Bigarren mailako funtzioak, parabolak



$f(x)=ax^2+bx+c$

Bigarren mailako funtzio polinomikoen grafikoa parabola da.

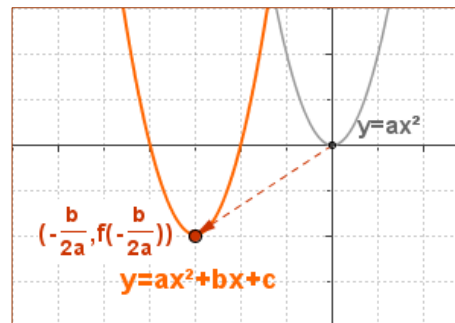
- ✓ **a**-k ahurtasuna adierazten du
 - $a > 0$ bada, minimo bat du.
 - $a < 0$ bada, maximo bat du.
- ✓ Simetria-ardatza: $x = -b/2a$
- ✓ Erpina: $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- ✓ OY ardatzarekiko ebakidura **c**
- ✓ OY ardatzarekiko ebakidura:

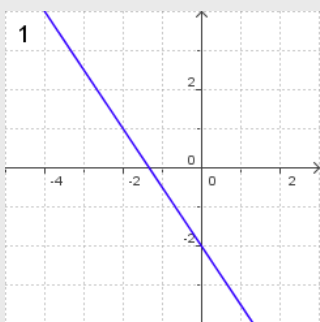
$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Parabolaren translazioak

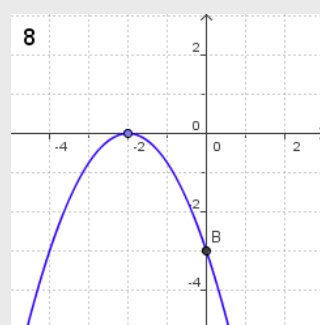
$y=ax^2+bx+c$ marrazteko, nahikoa da $y=ax^2$ lekualdatzea, $(0,0)$ bere erdina puntu honetara eramanda:

$$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

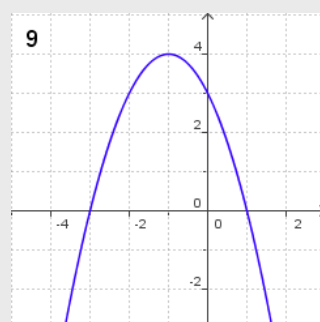




1. Zein da grafikoaren zuzenaren malda?
2. Kalkulatu $y = -0,75x - 2$ zuzenaren paraleloaren ekuazioa (2, 3) puntutik igarotzen dena
3. Zein A(2,3) eta B(4, 0) puntuetatik igarotzen den zuzenaren ekuazioa?
4. Kalkulatu $y = -0,75x + 1,5$ zuzenaren koordnatuen ardatzekiko ebakidura puntuak
5. Kalkulatu $y = -1,5x^2 - 9x - 18$ parabolaren erpina
6. Parabola batek abzisen ardatza (4, 0) eta (9, 0) puntuetan mozten du. Zein da bere simetria-ardatza?



7. Igar ezazu $f(x) = -2x^2 + x + 3$ parabolak zein puntutan mozten duen abzisen ardatza.
8. Grafikoaren parabola $y = -0,75x^2$ bezalakoa da. Sartu bere ekuazioaren koefizienteak.

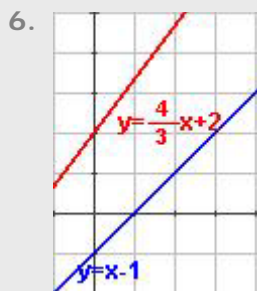


9. Grafikoko parabola $y = -x^2 - 2x + 3$ da. Zer tarte da $-x^2 - 2x + 3 > 0$ inekuazioaren ebazpena?
10. 35 m-ko luzera duen soka batekin angeluzuzen-itxurako partzela baten hiru alde hesitu nahi dira, besteak ibaiarekin muga egiten baitu. Zein da hesitu daitekeen gehieneko azalera?

Funtzio polinomikoak

Praktikatzeko ariketen ebazpenak

1. x: egunak y: kg $y=0,5x+30$
2. x: min y:€ $y=0,03x+0,10$
3. x: eguna y: or. $y=25x+40$
4. $y=1,16x$
5. Pendiente = $1/2$
Corte OY = 1 Corte OX = -2
Ec. $y = 1/2 x + 1$

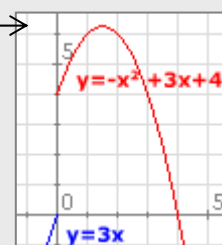
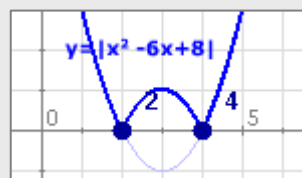


7. $y=x-1$
8. $y=2x+y$
9. a) $y = 62/7x+70$ b) $y = 2x+2$
10. $y=4x+40$
11. $y=5x+15$
12. a) Ez b) Bai

13. a) da interesgarriena
14. $y=-0,01x+250$
15. 0,14 € deia ezartzeak eta 0,68 € 9 minutuko dei batek
16. $b=4$ 17. $a=2$ 18. $c=3$
19. $y=-2x^2+4x+2$
20. $y=x^2+4x-3$
21. $y=2x^2-4x+5$
22. 28,8 m 23. 2352,25 cm²
24. 18 25. 4,5 26. 12 y 12
27. $10\sqrt{2}$ 28. 15

29. Ez da jarraia $x=0$ puntuan →

30.



31. $|2x+2| = \begin{cases} -2x-2 & \text{si } 2x+2 < 0 \leftrightarrow x < -1 \\ 2x+2 & \text{si } 2x+2 \geq 0 \leftrightarrow x \geq -1 \end{cases}$

AUTOEBALUAZIOAREN ebazpenak

1. malda = -1,5
2. $y = -0,75x + 4,5$
3. $y = -1,5x + 6$
4. (0, 1,5) (2,0)
5. (-3, -4,5)
6. $x = 6,5$
7. -1 eta 1,5 puntuan
8. $y = -0,75x^2 - 3x - 3$
9. (-3, 1)
10. 153,13 m²

Gogoratu jarduerak tutoreari bidaltzeaz ▶