

## Helburuak

Hamabostaldi honetan hauxe ikasiko duzu:

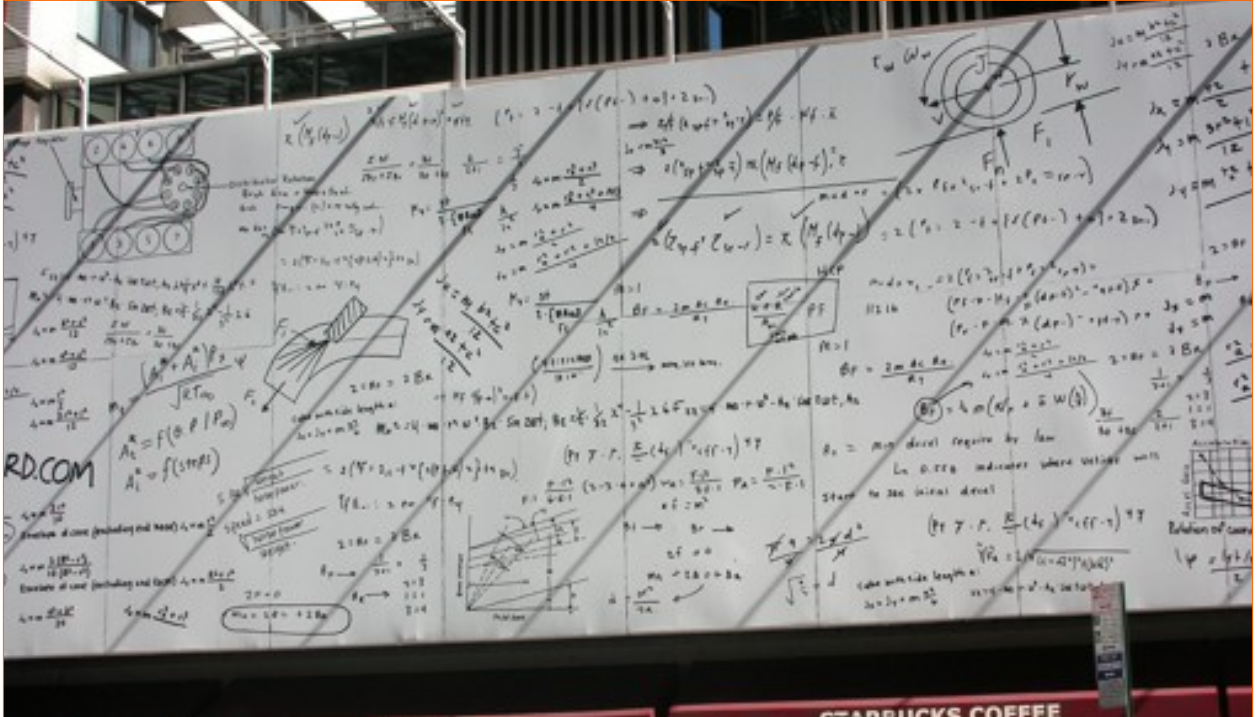
- Bigarren mailako ekuazio osoak eta osatugabeak ebazten.
- Ekuazio bikarratuak eta bigarren mailako batera murriztu daitezkeen beste batzuk ebazten.
- Ekuazio linealen sistemak ebazten, metodo desberdinak erabilita.
- Bigarren mailako ekuazioen sistemak ebazten.
- Aljebraren hizkuntza problemak ebazteko aplikatzen.

Hasi baino lehen.

1. Bigarren mailako ekuazioak .....orria 58
  - 2. mailako ekuazio osoak
  - 2. mailako ekuazio ez-osoak
  - 2. mailako ekuazio baten emaitzak
 Ekuazio bikarratuak  
Ecuaciones racionales
2. Ekuazio linealen sistemak .....orria 61
  - Sistema baten ebazpena
  - Sistema bateragarriak eta bateraezinak
  - Ebatzi sistemak ordezkapen-metodoa erabiliz
  - Ebatzi sistemak berdinketa-metodoa erabiliz
  - Ebatzi sistemak laburketa-metodoa erabiliz
3. Bigarren mailako sistemak .....orria 63
  - Mota honetakoak:  $ax+by=c$   $x \cdot y=d$
  - Mota honetakoak:  $a_0x^2+b_0y^2=c_0$
  - $a_1x+b_1y=c_1$
4. Aplikazio praktikoak .....orria 64
  - Problemen ebazpenak
  - Praktikatzeko ariketak
  - Gehiago jakiteko
  - Lapurpena
  - Autoebaluazioa
  - Tutoreari bidaltzeko jarduerak



## Hasi baino lehen



Eguneroko bizitzan topatzen ditugun problema praktiko askori aurre egiteko, ekuazio edo ekuazio-sistema bat ebatzi behar izaten dugu. Halakoetan, "aljebraren hizkuntza" erabili behar izaten dugu, izan ere hizkuntza aljebraikoa baliagarri gertatzen baitzaigu ohiko hizkuntzan helarazteko zailak diren erlazioak zehaztasunez adierazteko.

Magoak proposatzen duen jolasa lagun bati egiten saiatu, pentsatutako zenbakia asmatzeko nahikoa da zure emaitzari 1000 kendu eta zati 100 egitea, ekuazio bat planteatzen baduzu egiaztatuta ahal izango duzu:

- Pentsa ezazu zenbaki bat*     **x**
- Bikoiztu*     **2x**
- Gehitu 5 unitate*     **2x+5**
- Biderkatu bider 5*     **5 · (2x+5)**
- Batu 75 unitate*     **5 · (2x+5) + 75**
- Biderkatu dena bider 10*     **10 · [5 · (2x+5) + 75]**
- 10 · [5 · (2x+5) + 75] = emaitza
- 10 · (10x+25+75) = emaitza
- 10 · (10x+100) = emaitza
- 100x+1000 = emaitza
- x = (emaitza-1000)/100

### Aljebrar ekin erraza

**Pentsa ezazu zenbaki bat, bikoiztu, gehitu 5 unitate, biderkatu bider 5, batu 75 unitate eta Biderkatu dena bider 10.**

**Orain emaitza esan eta zure zenbakia asmatuko dut**

# Ekuazioak eta sistemak

## 1. Bigarren mailako ekuazioak

2. mailako ekuazioak honelakoak dira:

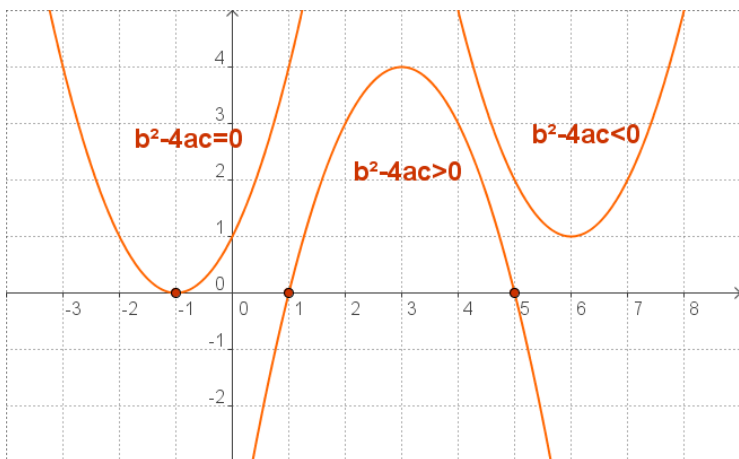
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ebazteko ondoko formula erabiliko dugu:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ekuazio hauek bi ebazpen izan ditzakete, ebazpen bakarra edo ebazpenik ez,  $b^2 - 4ac$ -ren arabera, honi diskriminatzailea deitzen zaio.

- $b^2 - 4ac > 0$       Bi ebazpen daude.
- $b^2 - 4ac = 0$       Ebazpen bikoitza dago:  $x = -b/2a$
- $b^2 - 4ac < 0$       Ez dago ebazpenik.



### Ekuazio ez-osoak

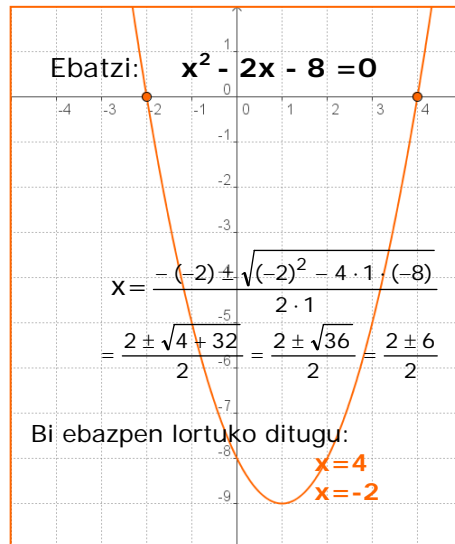
$b$ ,  $c$  edo biak 0 direnean 2. mailako ekuazio ez-osoak da.

Kasu hauetan formula aplikatzea ez da beharrezkoa eta jarraian azaltzen den moduan egitea errazagoa da:

- $b=0$  baldin bada  $ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -c/a$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

- $c=0$  baldin bada  $ax^2 + bx = 0$   
 $x$  faktore komuna aterata :  $x(ax+b) = 0$   
 $\Rightarrow x=0, x=-b/a$  dira bi ebazpenak.



**Nola lortzen da formula?**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$c$  beste aldera pasa:  
 $ax^2 + bx = -c$

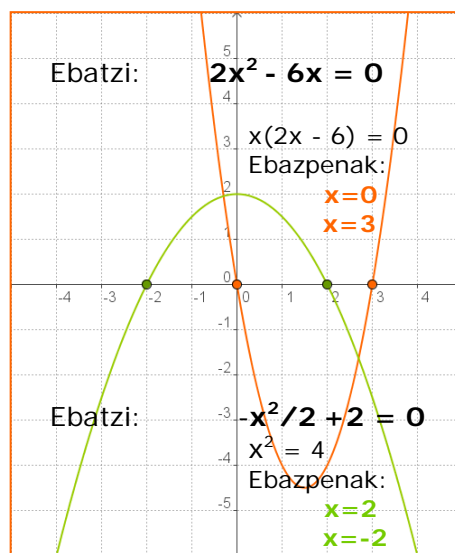
$4a$ -gatik biderkatu:  
 $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

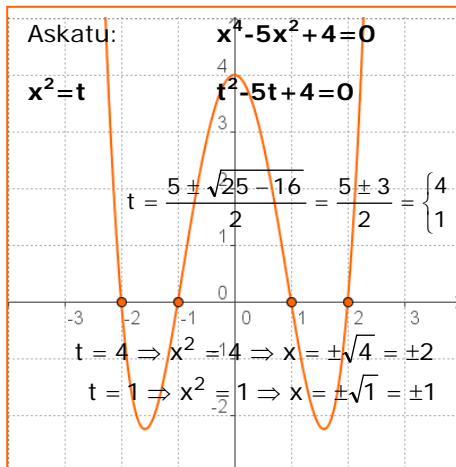
$b^2$ gehitu:  
 $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

Karratu perfektua dugu:  
 $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

Erroa atera:  
 $2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

$x$  bakandu:  
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$





## Ekuazio bikarratuak

$ax^4 + bx^2 + c = 0$  motako ekuazioak bikarratuak dira.

Hauek ebazteko nahikoa da  $x^2 = t$  egitea eta 2. mailako ekuazioa lortuko dugu:  $at^2 + bt + c = 0$ , non

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{t_1} \\ x = \pm\sqrt{t_2} \end{cases}$$

Jarraian 2. mailako ekuazio bihurtzen diren ekuazio batzuk ikusiko ditugu. Ebaztutako ariketetan adibide gehiago ikus ditzakezu.

## Arrazionalak

Ekuazio hauetan ezezaguna izendatzailean azaltzen da.

Hauek ebazteko ondoko prozesua jarraitu behar da: lehenik izendatzaileak kendu, eragiketa egin eta gelditzen den ekuazioa ebazti.

Komeni da lortutako ebazpenek izendatzailea ezeztatzen ez dutela egiaztatzea, hala gertatuko balitz ez litzatekeelako baliagarria izango.

Askatu:  $x - \frac{2}{1-x} = 4$

Izendatzaileak kenduko ditugu :  
 $x(1-x) - 2 = 4(1-x)$

Eragiketa egin :  
 $x - x^2 - 2 = 4 - 4x$

Ebatzi :  
 $x^2 - 5x + 6 = 0$   
 $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

Ebazpenak egiaztatu:  
 $x = 3$   
 $x = 2$   
Biak baliodunak dira

Askatu:  $\sqrt{x-1} + x = 7$

Erroa alde batera utzi:  
 $\sqrt{x-1} = 7 - x$

Karratua egin:  
 $(\sqrt{x-1})^2 = (7-x)^2$   
 $x-1 = 49 - 14x + x^2$

Ebatzi:  $x^2 - 15x + 50 = 0$   
 $x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2} = \begin{cases} 10 \\ 5 \end{cases}$

Ebazpenak egiaztatu:  
 $x = 10$  ez da balioduna  
 $x = 5$  da ebazpena

## Ekuazio irrazionalak

Ekuazio hauetan ezezaguna erroaren barruan azaltzen da.

Hauek ebazteko erroa albo batera uzten da eta bi aldeak karratu egiten dira. Eragiketak eginez 2. mailako ekuazio batera iritsiko gara eta ebazti egingo dugu.

Karratua egitean ebazpen "arraroak" gertatzen direnez jatorrizko ekuazioak egiaztatu behar dira.

# Ekuazioak eta sistemak

## Ariketen emaitzak

1. Ebatzi ekuazioak:

$$a) x^2 + 12x + 32 = 0 \quad x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-12 \pm 4}{2} = \begin{cases} -8 \\ -4 \end{cases}$$

$$b) 9x^2 + 6x + 1 = 0 \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$$

2. Ebatzi ekuazioak:

$$a) 2x^2 + 5x = 0 \quad x(2x+5)=0 \Rightarrow x=0, x=-5/2$$

$$b) 2x^2 - 32 = 0 \quad x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$$

3. m-ren balioa kalkulatu  $x^2+mx+9=0$  ekuazioak ebazpen bikoitza izan dezan.

$\Delta=b^2-4ac$  diskriminatzaileak 0 izan behar du,  $m^2 - 4 \cdot 9=0 \Rightarrow m^2=36$  eta  $m=\pm 6$   
 $m=6$  baldin bada,  $x^2+6x+9=0$  eta ebazpena  $x=-3$ ;  $m=-6$  baldin bada,  $x^2-6x+9=0$  eta ebazpena  $x=3$

4. Ebatzi ekuazioak:

$$a) x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \quad t^2 - 25t + 144 = 0$$

$$x^2=t \quad t = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} 16 \Rightarrow x = \pm 4 \\ 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

$$1. b) x^4 + 9x^2 - 162 = 0 \quad t^2 + 9t - 162 = 0$$

$$x^2=t$$

$$t = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 648}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-9 \pm 27}{2} = \begin{cases} -18 \Rightarrow \text{Sin sol.} \\ 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

5. Ebatzi ekuazioak:

$$a) \frac{9-x}{1+3x} + \frac{3}{1-x} = -2 \quad (9-x)(1-x) + 3(1+3x) = -2(1+3x)(1-x)$$

$$9-9x-x+x^2+3+9x = -2+2x-6x+6x^2$$

$$5x^2 - 3x - 14 = 0 \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9+280}}{10} = \frac{3 \pm \sqrt{289}}{10} = \frac{3 \pm 17}{10} = \begin{cases} 2 \\ -7/5 \end{cases}$$

Ekuazioan ordezkatzuz bi ebazpenek balio dute

$$b) \frac{1-x}{5(x+1)} - \frac{8}{x-2} = 1 \quad (x-2)(1-x) - 8 \cdot 5(x+1) = 5(x+1)(x-2)$$

$$x-2-x^2+2x-40x-40 = 5x^2+5x-10x-10$$

$$6x^2 + 32x + 32 = 0 \quad x = \frac{-32 \pm \sqrt{1024 - 768}}{12} = \frac{-32 \pm \sqrt{256}}{12} = \frac{-32 \pm 16}{12} = \begin{cases} -4 \\ -4/3 \end{cases}$$

Ekuazioan ordezkatzuz bi ebazpenek balio dute

6. Ebatzi ekuazioak:

$$a) x+1 - \sqrt{5x+1} = 0 \quad x+1 = \sqrt{5x+1}$$

$$(x+1)^2 = (\sqrt{5x+1})^2 \Rightarrow x^2+2x+1=5x+1$$

$$x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0, x=3$$

Ekuazioan ordezkatzuz bi ebazpenek balio dute

$$b) \sqrt{3x+4} + 2x = 4 \quad \sqrt{3x+4} = 4-2x$$

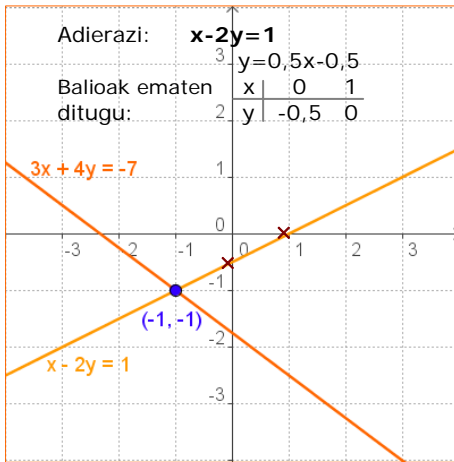
$$(\sqrt{3x+4})^2 = (4-2x)^2 \Rightarrow 3x+4=16-16x+4x^2$$

$$4x^2-19x+12=0$$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{361-192}}{8} = \frac{19 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{19 \pm 13}{8} = \begin{cases} 4 \\ 3/4 \end{cases}$$

$x=3/4$  ebazpenak bakarrik balio du

## 2. Ekuazio-sistemak



Bi ezezagunen ekuazio linealen sistema batean, ekuazio bakoitzak planoan zuzen bat irudikatzen du.

Sistema bat eztabaidatzea, zuzen horiek planoan nola kokatzen diren aztertzea da. Honelakoak izan daitezke:

- Ebakitzaileak, sistemak ebazpen bakarra dauka, **Bateragarri zehaztua** deitzen da.
- Baterakideak, sistemak ebazpen infinituak ditu, **Bateragarri zehaztugabea** da.

Askatu:

$$\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

### ORDEZKAPEN METODOA ERABILIZ

x bakandu 2. ekuazioan eta lehenengoan ordezkatu:  $x = 1 + 2y$

$$3(1 + 2y) + 4y = -7$$

$$3 + 6y + 4y = -7 \Rightarrow 10y = -10$$

$$y = -1$$

$$x = 1 + 2 \cdot (-1) = -1$$

### BERDINKETA METODOA ERABILIZ

x bakandu bi ekuazioetan eta berdindu:  $\frac{-4y - 7}{3} = 1 + 2y$

$$-4y - 7 = 3(1 + 2y)$$

$$-4y - 6y = 3 + 7 \Rightarrow -10y = 10$$

$$y = -1$$

$$x = -1$$

### LABURKETA bidez

$$\begin{array}{r} 3x + 4y = -7 \\ 2\text{rekin biderkatzen dugu} \rightarrow 2x - 4y = 2 \\ \hline \text{Batuz:} \quad 5x = -5 \\ \text{Hortaz:} \quad x = -1 \\ \text{Eta ordezkatu:} \quad y = -1 \end{array}$$

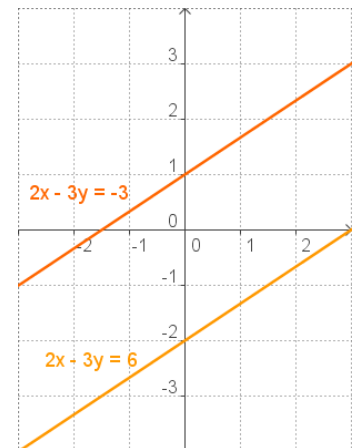
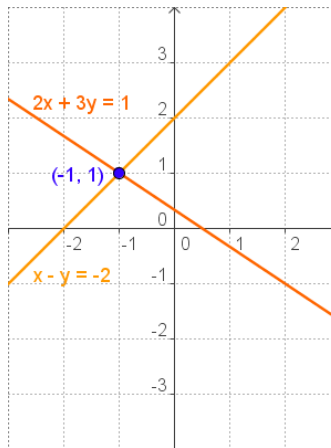
Ekuazio linealen sistema aldi berean betetzen diren lehen mailako ekuazioen multzoa da.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2 \text{ zenbaki errealak dira}$$

Sistemaren ebazpena zenbaki bikote bat da  $(x, y)$  sistemaren bi ekuazioak egiaztatzen dituena.

Ebazpen berdina duten bi sistema baliokideak dira.

Ebazpena duten sistemak **bateragarriak** dira eta ez dutenak **bateraezinak**



Ekuazio sistema bat ebazteko ondoko hiru metodoetako edozein erabiliko dugu:

### Ordezkatze-metodoa

Ekuazioetako batean ezezagun bat bakandu eta lortutako adierazpena beste ekuazioak ordezkatu behar da, eta ezezagun bakarra duen lehen mailako ekuazio bat lortzen da; hau aurkitu ondoren bestea kalkulatu.

### Berdintze-metodoa

Bi ekuazioetan ezezagun berdina bakandu behar da eta lortutako adierazpenak berdindu. Berriz ere ezezagun bakarra duen lehen mailako ekuazioa lortuko dugu.

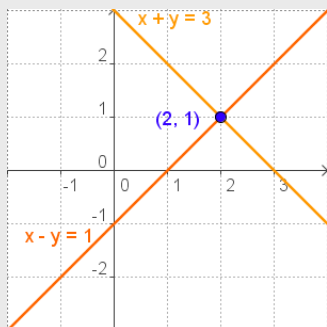
### Laburtze-metodoa

Bi ezezagunetako bat ezabatu behar dugu bi ekuazioak batuz. Horretarako bietako ekuazio bat edo biak biderkatu egingo ditugu x edo y-ren koefizienteak berdinak eta aurkako zeinukoak izan daitezen.

## Ariketen emaitzak

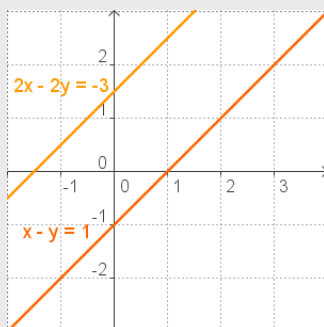
7. Dagozkien zuzenak adierazi eta ondoko sistemak eztabaidatu:

a)  $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$



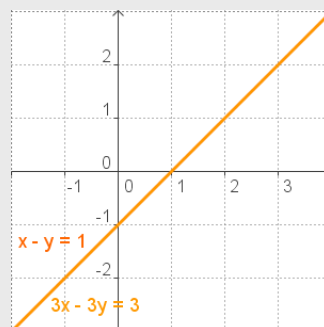
Bateragarri determinatua

b)  $\begin{cases} 2x - 2y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$



Bateraezin

c)  $\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$



Bateragarri indeterminatua

8. Ebatzi ordezen metodoa erabiliz:

a)  $\begin{cases} x + 4y = -25 \\ -10x - 5y = 5 \end{cases}$

1. go ekuazioan x bakandu

$$x = -25 - 4y$$

2. ean ordezkatu

$$-10(-25 - 4y) - 5y = 5 \Rightarrow 250 + 40y - 5y = 5$$

$$35y = -245 \Rightarrow y = -7$$

$$x = -25 - 4 \cdot (-7) = 3$$

b)  $\begin{cases} 3x + 5y = 45 \\ -4x - y = -43 \end{cases}$

2. ekuazioan y bakandu

$$y = -4x + 43$$

1. goan ordezkatu

$$3x + 5(-4x + 43) = 45 \Rightarrow 3x - 20x + 215 = 45$$

$$-17x = -170 \Rightarrow x = 10$$

$$y = -4 \cdot 10 + 43 = 3$$

9. Ebatzi berdinketa-metodoa erabiliz:

a)  $\begin{cases} -4x + y = 20 & y = 20 + 4x \\ 6x - 9y = 0 & y = 6x / 9 \end{cases}$

$$20 + 4x = \frac{6x}{9} \Rightarrow 180 + 36x = 6x$$

$$30x = -180 \Rightarrow x = -6$$

$$y = -36/9 = -4$$

b)  $\begin{cases} -3x - 4y = 31 & x = (31 + 4y) / -3 \\ 5x - 9y = 11 & x = (11 + 9y) / 5 \end{cases}$

$$\frac{31 + 4y}{-3} = \frac{11 + 9y}{5} \Rightarrow 5(31 + 4y) = -3(11 + 9y)$$

$$155 + 20y = -33 - 27y \Rightarrow 47y = -188 \Rightarrow y = -4$$

$$x = (11 - 36) / 5 = -5$$

10. Ebatzi laburketa-metodoa erabiliz:

a)  $\begin{cases} 5x - 10y = 25 \\ 8x + 2y = 4 \end{cases}$

$$5x - 10y = 25$$

$$5 \rightarrow \text{gatik biderkatu} \quad 40x + 10y = 20$$

$$\text{Batuz:} \quad 45x = 45$$

$$x = 1 \quad y = -2$$

b)  $\begin{cases} 5x + 3y = 21 \\ 7x + 8y = 37 \end{cases}$

$$-7 \rightarrow \text{gatik biderkatu} \quad -35x - 21y = -147$$

$$5 \rightarrow \text{gatik biderkatu} \quad 35x + 40y = 185$$

$$\text{Batuz:} \quad 19y = 38$$

$$y = 2 \quad x = 3$$

Ebatzi:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = \frac{22}{15} \\ 7x - 7y = 28 \end{cases}$$

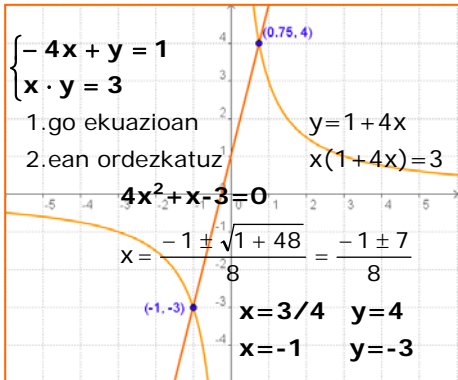
izendatzaileak kenduz eta 2. ekuazioa sinplifikatuz, sistema baliokide bakarra bihurtzen da.

LABURKETA METODOA ERABILIZ

$$\begin{array}{r} 5x - 3y = 22 \\ -3y + 3y = -12 \\ \hline 2x = 10 \end{array} \Rightarrow x = 5 \quad y = 1$$

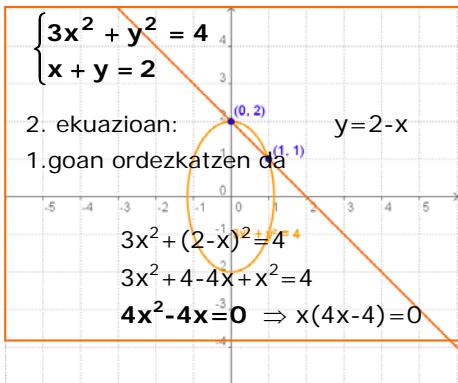
$$\begin{cases} 5x - 3y = 22 \\ x - y = 4 \end{cases}$$





Sistema hauetan ekuazio bat edo biak ez dira linealak. Hauek ebazteko 2. mailako ekuazioak ebazteko erabiltzen ditugun metodoak eta sistema linealak aplikatuko ditugu. Ikus ditzagun adibide batzuk.

- Mota:  $\begin{cases} ax + by = c_1 \\ x \cdot y = c_2 \end{cases}$
- Mota:  $\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$



Mota honetako sistemak ebazteko  $x$  edo  $y$  bakanduko ditugu ekuazio batean eta bestean ordezkatu dugu. Murriztu egiten da eta geratzen den ekuazioa ebazten da.

Amaitzeko bakandutako ekuazioan aurkitutako balioak ordezkatu ditugu beste ezezaguna kalkulatzeko.

## Ariketen emaitzak

11. Ebatzi:

a)  $\begin{cases} x - y = -1 \\ x \cdot y = 20 \end{cases}$

1. go ekuazioan:  $x = y - 1$   
 2. ekuazioan:  $(y - 1)y = 20$   
 $y^2 - y - 20 = 0$   

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 & x = 4 \\ -4 & x = -5 \end{cases}$$

b)  $\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ x \cdot y = 24 \end{cases}$

2. ekuazioan:  $x = 24/y$   
 1. go ekuazioan:  $48/y + 3y = 30$   
 $3y^2 - 30y + 48 = 0 \Rightarrow y^2 - 10y + 16 = 0$   

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} 8 & x = 3 \\ 2 & x = 12 \end{cases}$$

12. Ebatzi:

a)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x + y = -1 \end{cases}$

2. ekuazioan:  $x = -y - 1$   
 1. go ekuazioan:  $(-y - 1)^2 + y^2 = 41$   
 $y^2 + 2y + 1 + y^2 = 41$   
 $2y^2 + 2y - 40 = 0$   

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 320}}{4} = \frac{-2 \pm 18}{4} = \begin{cases} 4 & x = -5 \\ -5 & x = 4 \end{cases}$$

b)  $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

2. ekuazioan:  $x = (-1 - 3y)/2$   
 1. go ekuazioan:  $\frac{(-1 - 3y)^2}{4} - 2y^2 = 7$   
 $1 + 9y^2 + 6y - 8y^2 = 28$   
 $y^2 + 6y - 27 = 0$   

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 108}}{2} = \frac{-6 \pm 12}{2} = \begin{cases} 3 & x = -5 \\ -9 & x = 13 \end{cases}$$

# Ekuazioak eta sistemak

## 4. Problemen ebazpenak

Problema bat ekuazio baten edo ekuazio-sistema baten bidez ebazteko, hizkuntza aljebraikora itzuli behar dira enuntziatuaren baldintzak eta gero ekuazioa edo planteatutako sistema ebatzi.

A continuación puedes ver algunos ejemplos:

- ✓ *Bilera batean partaide bakoitzak beste guztiak agurtzen ditu, trukutzen diren agur kopurua 28 bada, zenbat pertsonek hartzen dute parte bileran?*

$x =$  laguntzaile kopurua

$$\frac{x(x-1)}{2} = 28 \Rightarrow x^2 - x = 56$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 56 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 224}}{2} = \frac{1 \pm 15}{2}$$

Ondokoa lortuko dugu  $x = -14/2 = -7$  eta  $x = 16/2 = 8$   
 Ebazpen negatiboak ez du balio pertsona kopuruaz ari garelako, beraz, 8 pertsona joango dira.

- ✓ *Bi pertsonak topo egiten dute eta bakoitzak kapital zehatz bat du. Batak besteari esaten dio: "Daukazunetik 3 unitate ematen badizkidazu, nik dudanari gehituz biok berdina izango dugu"; eta besteak eratzuten dio: "Zuk duzunetik 6 unitate ematen badizkiot eta geratzen zaizunaren bikoitza izando du". Zenbat du bakoitzak?*

A-k badauka  $x$        $\begin{cases} x + 3 = y - 3 \\ 2(x - 6) = y + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -6 \\ 2x - y = 18 \end{cases}$   
 B- b

Ebatzi laburketa-metodoa erabiliz:

$$\begin{array}{r} -x + y = 6 \\ 2x - y = 18 \\ \hline x = 24 \\ y = 6 + x = 30 \end{array}$$

- ✓ *Lursail angeluzuzen bat hesiz inguratu nahi da, alde batean eureka dagoela. Lursailaren azalera 2000 m<sup>2</sup>-koa bada eta hesitu beharreko hiru aldeek 140 m neurtzen badute, zein dira lursailaren neurriak?*

Dimensiones:  $x$  (ancho),  $y$  (largo)  $\begin{cases} 2x + y = 140 \\ x \cdot y = 2000 \end{cases}$

1. ekuazioan:  $y = 140 - 2x$   
 Sustituyendo en la 2ª:  $x \cdot (140 - 2x) = 2000$   
 Resolvemos la ecuación:  $2x^2 - 140x + 2000 = 0$   
 $x = 50$     $y = 40$   
 $x = 20$     $y = 100$

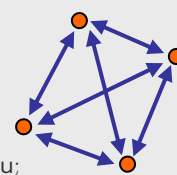
### Problema ebazteko

- 1º) Enuntziatua ulertu.
- 2º) Ezezagunak identifikatu.
- 3º) Hizkuntza aljebraikoa itzuli.
- 4º) Ekuazioa edo sistema ebatzi.
- 5º) Egiaztatu ebazpenak.

Laguntzaile kopurua:  $x$

Bakoitzak beste guztiak agurtzen ditu:  $x-1$   
 $A \rightarrow B$  eta  $B \rightarrow A$  agurrak berdinak dira, beraz, agur kopurua:

$x \cdot (x-1) / 2$



Egiaztapena:

8 pertsona, bakoitzak beste 7ak agurtzen ditu;  
 $8 \cdot 7 = 56$  eta erdia 28.

A pertsona:  $x$   
 B pertsona:  $y$

B-k ematen dio 3 A-ren      A-k B-ri 6 ematen dizkio

A-k badaukax	$x+3$	$x-6$
B- badaukay	$y-3$	$y+6$

Biak berdin      B bikoitza A

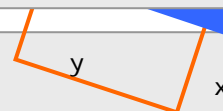
A-k dio:  $x+3 = y-3$   
 B-k dio:  $y+6 = 2(x-6)$

Egiaztapena:

B-k ematen dio 3 A-ren      A-k B-ri 6 ematen dizkio

A: $x=24$	$24+3=27$	$24-6=18$
B: $y=30$	$30-3=27$	$30+6=36$

Biak berdin      B bikoitza A



$x$ : zabalera  
 $y$ : luzera

Hesitu behar den perimetroa:

$2x + y = 140$  m

Azalera (oinarria x altuera):

$x \cdot y = 2000$  m<sup>2</sup>

Egiaztapena:

$x=50$   $y=40$        $x \cdot y = 50 \cdot 40 = 2000$   
 $x=20$   $y=100$        $x \cdot y = 20 \cdot 100 = 2000$



## Praktikatzeko

1. Ebatzi ekuazioak:

- a)  $-6x^2 - 7x + 155 = -8x$
- b)  $3x^2 + 8x + 14 = -5x$
- c)  $(x-6)(x-10)=60$
- d)  $(x+10)(x-9)=-78$

2. Ebatzi ekuazioak:

- a)  $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$
- b)  $x^4 + 14x^2 - 72 = 0$
- c)  $x^4 - 81 = 0$
- d)  $(x^2 - 8)(x^2 - 1) = 8$

3. Ebatzi ekuazioak:

- a)  $\frac{9}{2-x} + \frac{4}{2-3x} = 5$
- b)  $\frac{5+x}{2+2x} - \frac{2}{4-3x} = 2$
- c)  $3-x - \frac{6x+6}{7x+5} = 1$
- d)  $\frac{3+x}{3x+1} + \frac{x+2}{x+1} = 5$

4. Ebatzi ekuazioak:

- a)  $2\sqrt{9x} - x = 9$
- b)  $\sqrt{3+6x} - 2 = 4x$
- c)  $2x - \sqrt{x-2} = 5$

5. Ebatzi ekuazioak:

- a)  $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{4} = -\frac{3}{5} \\ 4x - 2y = 12 \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{8} = \frac{-3}{8} \\ 8x + 5y = 33 \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{8}{3} \\ 7x + 3y = 34 \end{cases}$
- d)  $\begin{cases} \frac{x}{9} - \frac{y}{2} = \frac{4}{9} \\ 5x - 7y = 20 \end{cases}$

6. Ebatzi ekuazioak:

- a)  $\begin{cases} x - 6y = -15 \\ x \cdot y = -9 \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} 2x + y = -18 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = -2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$
- d)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ x + y = 3 \end{cases}$

7. Bi zenbaki osoren biderkadura 192 da eta kendura 4. Zeintzuk dira zenbakiok?.

8. Segidan dauden bi zenbaki naturalen karratuak batu eta 342 bada, zeintzuk dira zenbakiok?.

9. 3 izendatzailea duen zatiki bat bere alderantzizkoarekin batu eta  $109/30$  bada, zein da zatikia?.

10. Zenbaki baten karratua gehi 6 zenbaki berbera bider 5 bada, zein da zenbakia?.

11. Bilatu ondoko baldintza betetzen duen zenbaki positibo bat: zenbaki hori ber 4 eta bider 6 gehi zenbaki hori ber 2 eta bider 7 eginez 124 izan dadila.

12. Juanen adina orain dela 9 urte hemendik 11 urtera izango duen adinaren erro karratua zen. Zehaztu orain duen adina.

13. Zatiki positibo baten zenbatzailea 4 da. Izendatzaileari 9 unitate gehituz zatikiaren balioa unitate bat gutxiago da. Zein da jatorrizko izendatzailea?

14. Bi iturrik ura aldi berean isurtzen badute eta biltegi bat betetzeko 2 ordu behar badituzte, zenbat denbora behar du bakoitzak bere aldetik, batek besteak baino 3 ordu gehiago behar baditu?

**ARRASTOA:** Iturri batek biltegia betetzeko  $x$  ordu behar baditu ordubetan biltegiaren  $1/x$  beteko du.

15. Aurkitu  $m$   $x^2 - mx + 121 = 0$  polinomioak ebazpen bikoitza izan dezan.

16. Bi zenbakiren batura 400 da eta handiena txikiena baino 4 aldiz handiagoa da, zeintzuk dira zenbakiok?.

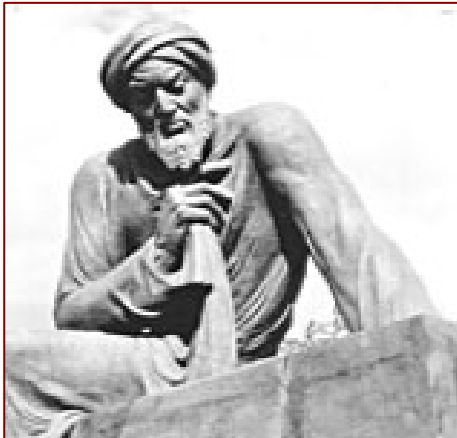
17. Palomak 272 € ordaindu zituen kontzertu baterako 4 sarreren eta antzerkirako 8 sarreren truke, Luisak 247 € ordaindu zituen kontzerturako 9 sarreren eta antzerkirako 3 sarreren truke. Zenbat balio du ikuskizun bakoitzera joateko sarrerak?

# Ekuzioak eta sistemak

18. Bi zenbakiren batura 241 eta kendura 99. Zeintzuk dira zenbakiok?.
19. Bi zenbakiren batura 400 da eta handiena txikiena baino 4 aldiz handiagoa da, zeintzuk dira zenbakiok?.
20. Pedro 335 € ditu 5€-ko eta 10€-ko billeteetan; guztira 52 billete baldin baditu, zenbat ditu bakoitzeko?.
21. Hotel batean 67 logela daude, logela bikoitzak eta banakakoak batuta. Guztira 92 ohe baldin badaude, mota bakoitzeko zenbat logela ditu?.
22. 1 €/litroko ardoa eta 3 €/litroko ardoa nahastu nahi dira 1,2 €/litroko ardoa lortzeko. Prezio bakoitzeko zenbat litro jarri beharko ditugu nahasketaren 2000 litro lortzeko?.
23. Biltegi batean bi motako lanparak daude, A motakoek 2 bonbilla erabiltzen dituzte eta B motakoek 7. Biltegian guztira 25 lanpara eta 160 bonbilla baldin badaude, mota bakoitzeko zenbat lanpara daude?.
24. Jolas-parke batean norian ibiltzeak 1 € balio du eta errusiar mendian ibiltzeak 4 €. Ana 13 aldiz ibili bada eta 16 €. gastatu baditu, zenbat aldiz ibili da bakoitzean?.
25. Ukuilu batean 77 ardi eta oilo daude, eta guztira 274 hanka zenbatzen ditugu. Zenbat ardi eta zenbat oilo daude?.
26. Aurkitu bi zifra dituen zenbaki bat ondokoa jakinik: bi zenbakien batura 7 da eta zenbaki horren eta elkarren artean aldatu ondoren gelditzen den zenbakiaren kendura 27 da.
- ARRASTOA:  $x$  hamarrekoen zifra baldin bada eta  $y$  batekoen zifra, zenbakia  $10x+y$  da, eta elkarren artean aldatzerakoan gelditzen den zenbakia  $10y+x$  da
27. Bi zenbaki naturalen batura 24 da eta biderkadura 135, zeintzuk dira zenbakiok?.
28. Lauki zuzen baten aldean luzerak kalkulatu ondokoa jakinik: diagonalak 58 cm neurtzen ditu eta alde luzeak motza baino 2 cm gehiago neurtzen du.
29. Bi zenbaki naturalen batura 13 da eta zenbaki horien karratuena 109, aurkitu zenbakiok.
30. Bi zenbaki osoen kendura 6 da eta biderkadura 247. Zeintzuk dira zenbakiok?.
31. Bi pertsonen adinaren batura 18 urte da eta biderkadura 77. Zenbat urte ditu bakoitzak?.
32. Kalkulatu 48 cm-ko perimetroa duen triangelu angeluzuzen baten aldeak, katetoen batura 28 cm dela jakinik.
33. Zenbaki baten bi zifren biderkadura 14 da eta batekoen zifraren eta hamarrekoen zifraren bikoitzaren arteko batura 16. Aurkitu zenbakia.
34. Bi karratuen azaleraren batura  $100 \text{ cm}^2$  bada eta perimetroen batura 56, zenbat neurtzen duten aldeek.
35. Triangelu isoszele baten alde berdinek 13 cm neurtzen dute eta altuera oinarria baino 2 cm luzeagoa da. Kalkulatu azalera.

*“Zenbakien edo kopuruen erlazio abstraktuen inguruko problemak ebazteko problema hori ingelesetik edo beste hizkuntzaren batetik hizkuntza aljebraikora itzultzea baino gauza hoberik ez dago”*

Newton (Aritmetica Universalis)



## Gehiago jakiteko



### Aljibraren "asmatzailea"

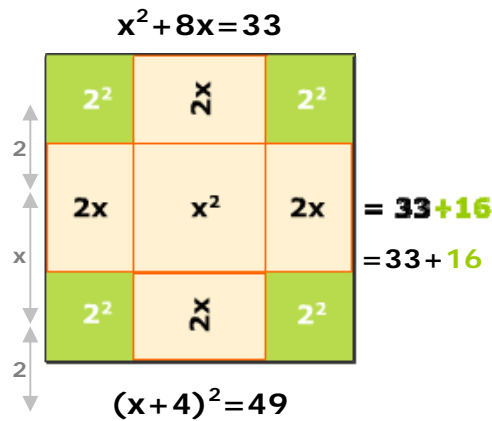
Mohamed ibn-Musa Al-Khwarizmi, gutxi gorabehera 780-850 urteen artean bizi izan zen eta Bagdadeko Jakinduriaren Etxean lan egin zuen.

Bere lanetatik bost liburu heldu dira guganaino, haien artean "*al-Mujtasar fi hisab al-jabr wa'l muqabala*", ezagutzen den aljibrari buruzko lehen tratatua.

Al-Khwarizmik sei mota desberdinetan sailkatzen ditu ekuazioak eta kasu bakoitza modu desberdinean ebazten du, metodo geometrikoak erabiliz, grafikoan ikus dezakezun bezalako.

### Ekuazioen sailkapena Al-Jwarizmi-ren arabera

- gauza=gauzaren karratua  
 $ax^2=bx$
- gauza=zenbakiaren karratua  
 $ax^2=c$
- gauza=zenbakia  
 $ax=b$
- gauza+gauza=zenbakia  
 $ax^2+bx=c$
- gauza+zenbakia=gauzaren karratua  
 $ax^2+c=bx$
- gauza=gauza+zenbakiaren karratua  
 $ax^2=bx+c$



$x^2 + 8x = 33$
$x^2 + 8x = 33$
$x^2 + 4 \cdot 2 \cdot x = 33$
$x^2 + 2 \cdot 4x + 16 = 33 + 16$
$(x+4)^2 = 49$
$x+4=7 \quad x+4=-7$
$x=3 \quad x=-11$



### Zergatik x?

Arabiarrek "shay" (gauza) deitzen zioten ezezagunari. Lehen itzulpena latinera Espainian egin zen (Roberto de Chester, Toledo, 1145), eta arabieraren hitzak Erdi Aroko x-aren antza duenez, x deitu zioten eta hortxe darrai. Italian "*cosa*" bezala itzuli zuten, laburduran *co* deitu zioten eta ekuazioak ebazten zituztenei "*cosista*" deitzen zieten.

# Ekuazioak eta sistemak



## Gogora ezazu garrantzitsuenak

### Bigarren mailako ekuazioak

- Osoak:  $ax^2+bx+c=0$

Ondoko formula erabiliz ebazten dira:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- Osatugabeak:  $ax^2+c=0$

Bakandu:  $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$

- Osatugabeak:  $ax^2+bx=0$

Bi ebazpen:  $x=0$ ,  $x=-b/a$

### Ekuazio linealen sistemak

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  Bi ezezagun dituen bi ekuazio linealeko sistema batean ekuazio bakoitzak bere adierazpena du planoko zuzen batean. Ebakidura-puntua  $(x,y)$  baldin badago sistemaren ebazpena da.

Sistema bat ebazteko ondoko metodoak erabiliko ditugu:

**Ordezkapen-metodoa:** Ekuazio batean ezezagun bat bakandu eta bestean ordezkatzen da.

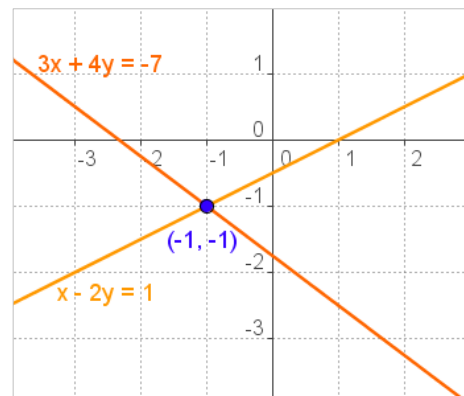
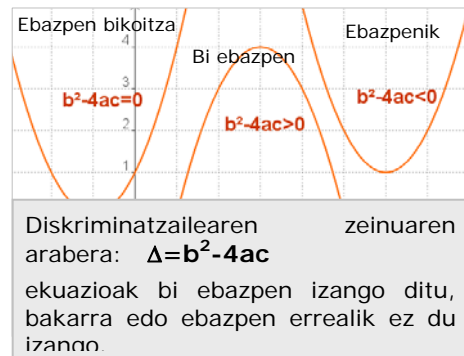
**Berdinketa-metodoa:** Bi ekuazioetan ezezagun berdina bakandu eta lortutako adierazpenak berdintzen dira.

**Laburketa-metodoa:** Ekuazio bat edo biak zenbaki egokiagatik biderkatu eta biak batzerakoan ezezagun bat ezabatu egingo da.

## 2. mailako ekuazio-sistema

Sistema hauetan ekuazioetako bat edo biak bigarren mailakoak dira ezezagun batean edo bietan.

Normalean lehen mailako ekuazioan ezezagun bat askatuz eta bestean bigarren mailako ekuazioa sortzen duena ordezkatuz ebazten dira.



- Sistema **baliokideek** ebazpen berbera dute.
- Sistema bat **bateragarria** izango da ebazpen baldin badu, eta **bateraezina** ebazpenik ez badu.

### Problemak ebazteko

- ✓ Enuntziatua ulertu.
- ✓ Ezezagunak identifikatu.
- ✓ Hizkuntza aljebraikora itzuli.
- ✓ Ekuazioa edo sistema ebatzi.
- ✓ Egiaztatu ebazpenak.

## Autoebaluazioa



1. Ebatzi ekuazioa:  $3x^2 + 15x = 0$
2. Ebatzi ekuazioa:  $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$ .
3. Ebatzi ekuazioa:  $(x - 3)^2 = 21 - 6(8 - x)$ .
4. Ebatzi ekuazioa:  $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{10}{3}$
5. Ebatzi ondoko sistema: 
$$\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 9 \\ 6x - 2y = 164 \end{cases}$$
6. Ebatzi ondoko sistema: 
$$\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{x}{y} = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$
7. Aurkitu segidan dauden bi zenbaki natural zenbaki horien karratuen batura 1105 izanik.
8. 13 € ditugu 2 €-ko eta 50 zantimoko txanponetan, guztira 14 txanpon baldin badaude, zenbat dira mota bakoitzekoak?
9. 720 m<sup>2</sup>-kose lursail bat hesiz inguratzeko, 112 m hesi erabili dira. Kalkula itzazu lursailaren neurriak.
10. Aurkitu 2. mailako ekuazio bat erroen batura 7 eta biderkadura 12 izanik.

## Praktikatzeko ariketen ebazpenak

- a)  $x=5$ ,  $x=-31/6$  b)  $x=-2$ ,  $x=-7/3$   
c)  $x=16$ ,  $x=0$  d)  $x=21$ ,  $x=1$
- a)  $x = \pm \sqrt{12}$  b)  $x = \pm 2$   
c)  $x = \pm 3$  d)  $x = 0$ ,  $x = \pm 3$
- a)  $x=5$ ,  $x=-2$  b)  $x=19/9$ ,  $x=0$   
c)  $x=1$ ,  $x=-4/7$  d)  $x=0$ ,  $x=-9/11$
- a)  $x=9$  b)  $x=-1/8$ ,  $x=-1/2$   
c)  $x=3$ ,  $x=9/4$  Ez da balioduna
- a)  $x=7$   $y=8$  b)  $x=1$   $y=5$   
c)  $x=4$   $y=2$  d)  $x=4$   $y=0$
- a)  $x=-3$   $y=3$ ;  $x=-9/2$   $y=2$   
b)  $x=-5$   $y=-8$ ;  $x=-4$   $y=-10$   
c)  $x=-5$   $y=3$ ;  $x=-1$   $y=1$   
d)  $x=-4$   $y=7$ ;  $x=7$   $y=-4$
- 12 eta 16 edo -16 eta -12
- 18 edo 19
- 3/10
- 3 y 2
- Izendatzailea 3 da
- 14 urte
- 24 (Ebazpen negatiboak ez du balio)
- Iturri batek 3 h eta besteak 2 h
- 22 eta -22
- 320 eta 80
- Antzerkiak: 25€, kontzertuak: 18€
- 170 eta 71
- 80 eta 320
- 10€-ko 15 eta 5€-ko 37
- 25 bikoitz eta 42 banakako
- 1€ ko 1800 litro eta 3€ko 200 litro
- A motako 3 eta B motako 22
- Norian 12 aldiz eta errusiar mendian behin
- 17 oilo eta 60 ardi
- 52 zenbakia
- 9 eta 15
- 40 eta 42
- 10 eta 3
- 13, 19 eta -13,-19
- 11 eta 7
- Katetoek 12 eta 16, hipotenusak 20
- 72
- 1 eta 8
- altuera=12, oinarria=10; azalera 60

## Autoebaluazio- ebazpenak

- $x=0$ ,  $x=-5$
- $x = \pm 6$ ,  $x = \pm 1$
- $x=8$  ;  $x=15$
- $x = \pm 8$
- $x=30$   $y=8$
- $x=6$   $y=9$   
 $x=2$   $y=1$
- 23 eta 24
- 2 €-ko 4 eta 0,50€-ko 10
- 36 m x 20 m
- $x^2 - 7x + 12 = 0$   
Ebazpenak 3 eta 4

Jarduerak tutoriari bidali, ahaztu gabe ▶