7 Trigonometria

Continguts

1. Els angles i la seva mesura
   - Recorreguts en la circumferència
   - Radiants
   - Graus sexagesimals
   - De radiants a graus
   - Mesurant angles
2. Raons trigonomètriques
   - Raons trigonomètriques
   - Sinus i cosinus en la circumferència
   - Tangent en la circumferència
   - Raons de 30º, 45º i 60º
3. Relacions trigonomètriques
   - Relacions fonamentals
4. Resoldre triangles rectangles
   - Amb un angle i la hipotenusa
   - Donats un angle i un catet
   - Coneguts dos costats
5. Raons d'angles qualssevol
   - Sinus
   - Cosinus
   - Tangent
6. Aplicacions de la trigonometria
   - Resoldre problemes mètrics

Objectius

- Calcular les raons trigonomètriques d'un angle.
- Trobar totes les raons trigonomètriques d'un angle a partir d'una d'aquestes.
- Resoldre triangles rectangles quan es coneixen dos costats o un costat i un angle.
- Resoldre situacions relacionades amb la geometria en les quals es necessiti calcular angles i distàncies entre dos punts.
- Utilitzar la calculadora per obtenir raons o angles.

Autora: Mª Isabel Hermida Rodríguez
Versió en català: Francesc Cassasas Canals

Abans de començar

En l'escena de la dreta tens una presentació en la que pots llegir la història de la trigonometria; clicant en les fletxes i podràs veure les diferents diapositives.

CONTESTA	RESPOSTA
Quins és el primer monument que es coneix que serveix per fer càlculs astronòmics?	
Escriu vàries civilitzacions antigues que van fer servir la trigonometria	
Escriu vàries utilitats de la trigonometria en l'antiguitat	
Escriu vàries utilitats de la trigonometria en l'actualitat	

Investiga

Segurament deus haver vist aquest senyal a les carreteres i saps què indica: pendent prolongada. També deus recordar el concepte de pendent d'una recta.
Segons aquest, el 10% significa que cada 100 m recorreguts en horitzontal, en pugem (o baixem) 10 en vertical. Però alguns interpreten els 100 m com el camí real recorregut.
Què n'opines?, influeix gaire considerar-ho d'una o una altra forma?

Explica breuement la teva opinió

____

____

Prem el botó per repassar la semblança i el Teorema de Pitàgores.

Prem per anar a la següent pàgina.

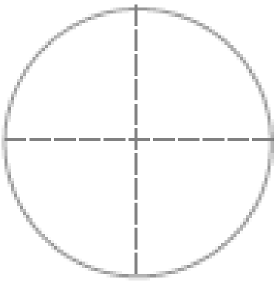
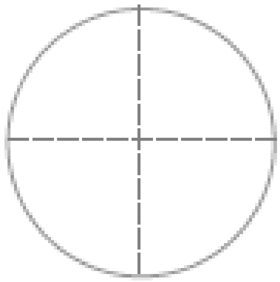
1. Els angles i la seva mesura

1.a. Recorreguts en la circumferència

Trigonometria es una paraula que deriva del grec Τριγωνομετρία, tri (Τρι) tres, gono (γωνο) angle, metria (μετρία) mesura, és a dir, "mesura de tres angles". Pots consultar la definició de trigonometria que dóna el diccionari de la RAE.
En aquest curs es tractarà únicament la trigonometria plana.
Per tal d'estudiar els angles i la seva mesura definirem l'angle com un recorregut en la circumferència amb centre l'origen i de radi unitat o **circumferència goniomètrica**.El punt de partida d'aquests recorreguts es situarà en el punt de coordenades (1,0) i la mesura d'un angle serà la mesura d'aquest recorregut. Els angles poden tenir sentit positiu o negatiu segons el sentit del recorregut; si és contrari al de les agulles del rellotge serà positiu i si és igual, negatiu.

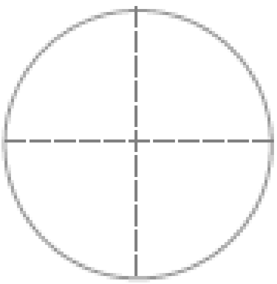
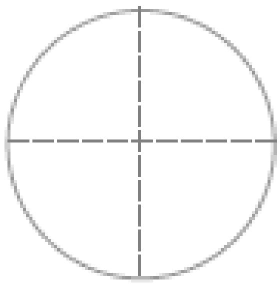
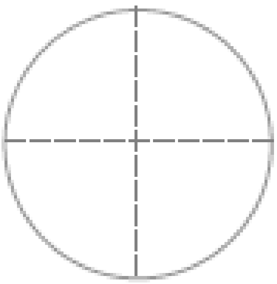
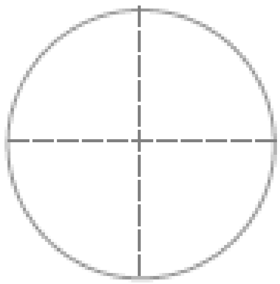
Observa i manipula l'escena de l'esquerra:

CONTESTA	RESPOSTA
Què és un angle?	
Què significa que un angle tingui sentit positiu?	
Què significa que un angle tingui sentit negatiu?	
A què anomenem circumferència **goniomètrica**?	

*Dibuix un angle **positiu***	*Dibuixa un angle **negatiu***
	

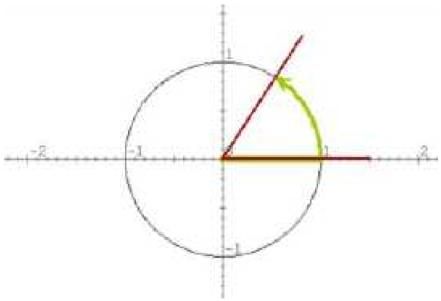
Clica en el botó per resoldre un exercici.

Dibuixa aquí com a mínim 4 dels angles que es proposen, i escriu al costat l'opció correcta que has d'escollir en la escena:

Clica per anar a la següent pàgina.

1.b. Radiants



Mesurar un angle és mesurar el seu recorregut en la circumferència. Com que la mesura de tota la circumferència és **2·Π·radi**, resulta convenient prendre com a unitat de mesura el radi. A la pàgina anterior, els angles es van representar en una circumferència de radi 1, això no significa que el radi mesuri 1 cm o 1 peu o 1 m, sinó que el radi és la unitat de mesura presa. Per raons evidents a aquesta unitat se l'anomena radiant.

L'escena comença mostrant l'angle de mesura d'un radiant, el recorregut del qual en la circumferència és igual al seu radi. Després, en els exemples, es demana una estimació de la mesura d'alguns angles. Escriu aquí l'opció correcta en cada cas:

Exemple 1	*Exemple 2*

Clica en el botó pe visualitzar alguns angles en radiants.

Clica per anar a la següent pàgina.

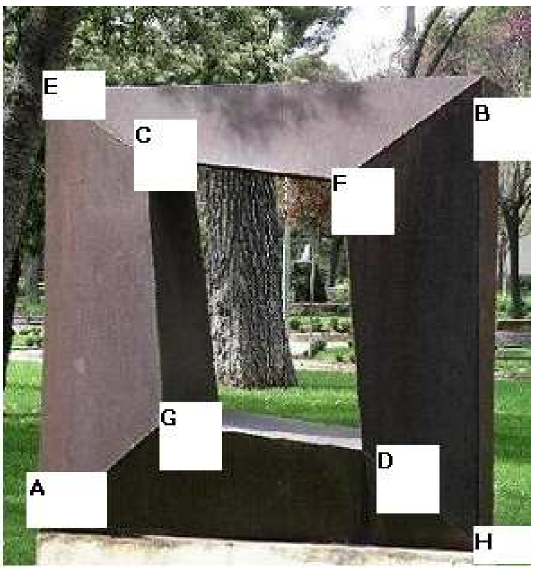
1.c. Graus sexagesimals

Ja coneixes el sistema sexagesimal de mesura d'angles. En dividir la circumferència en 360 parts iguals, obtenim un grau, al seu torn cada grau es compon de 60 minuts i cada minut de 60 segons. Així un angle es mesura en:

Graus º minuts ' segons ''

Sistema Sexagesimal
Té base 60. Aquest sistema de mesura l'hem heretat de l'antiga Babilònia, observa la semblança amb la forma com mesurem el temps. Saps per què?

Amb l'ajuda de l'escena de l'esquerra, mesura els angles de la fotografia que s'indiquen



Clica en el botó per resoldre un exercici.

A les calculadores usuals solen aparèixer quatre tipus de mesura d'angles, "DEG" o expressió en graus sexagesimals; la tecla < º ' " > dóna els graus enters de l'angle i la part decimal es compta en minuts (1/60 de grau) i segons (1/60 de minut). Un altre tipus es denota amb "RAD" és a dir, radiants. I també es sol veure l'expressió de l'angle en graus centesimals "GRAD" cada grau centesimal és la centèsima part de l'angle recte, tota la circumferència està formada per 400 graus centesimals. 1GRAD=90/100 DEG.

Intenta completar la següent taula, expressant cada angle en els quatre sistemes de mesura descrits.

GRAD	DEG	º ' "	RAD
-100			
	180		
			∏/6
		60º 30'	
			-∏/4
	135		

Clica per anar a la següent pàgina.

1.d. De graus a radiants i de radiants a graus

Llegeix l'explicació teòrica i observa l'escena.

Completa:

El semiperímetre de la semicircumferència és __________

____ radiants = _____ graus

És a dir, _______________ = _____________________

_______ radiant = _______ grau

Si aïllem el grau resulta:

1 grau = ___________ ~ _________ radiants

Si aïllem el radiant resulta:

1 radiant = ________ graus ~ ________ graus

$$1 \text{ grau} = \frac{\pi}{180} \text{ radiants}$$

$$\mathbf{1 \text{ radiant}} = \mathbf{\frac{180}{\pi} \text{ graus}}$$

Practica amb l'escena el pas d'un sistema de mesura a l'altre.

EXERCICIS

1. Dibuixa en la circumferència goniomètrica els angles de 120º, -50º i 315º:

2. Dibuixa en la circumferència goniomètrica els angles de 5π/6, 3π/4, i 3π/2 rad:

3. Passa a radiants:

   a. 150º, b. 210º c. 270º d. 60º

4. Passa a graus:

   a. 11π/6 rad b. π/4 rad c. 5π/4 rad d. 2π/3 rad

Clica per anar a la següent pàgina.

1.e. Mesurant angles

En l'escena d'aquesta pàgina es poden mesurar angles amb diferents unitats i diferent signe. Practica amb ella canviant el sentit de gir de l'angle i les unitats de mesura.

Clica en el botó per veure quatre exercicis resolts.

Clica per anar a la següent pàgina.

2. Raons trigonomètriques

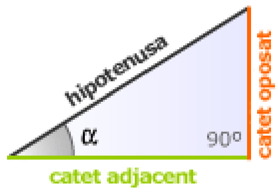
2.a. Raons trigonomètriques

En els triangles semblants els angles són iguals i els costats homòlegs són proporcionals. La raó entre els costats d'un triangle determina la seva forma.

> **Recorda**
> S'anomena raó o proporció entre dos nombres al seu quocient.

Donat un triangle rectangle, les **raons trigonomètriques** de l'angle agut **α** es defineix:

- ✓ El sinus és el quocient entre ____________________ i ____________________.
- ✓ El cosinus és el quocient entre ____________________ i ____________________.
- ✓ La tangent és el quocient entre ____________________ i ____________________.



En l'escena pots variar el valor de l'angle **α** i la mida del triangle i observar que aquestes raons no depenen de la mida del triangle si no de l'angle **α**.

També s'utilitzen les raons inverses a aquestes, pots veure-les fent clic a l'enllaç aquí
Completa la taula amb aquestes raons per un angle **α**

sec α= ________	cosec α = ________	cotg α = ________

Clica per anar a la següent pàgina.

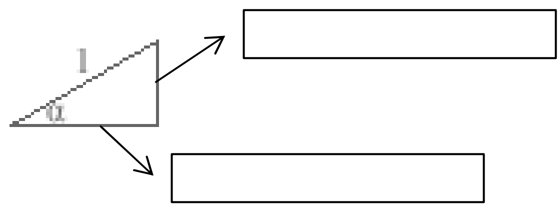
2.b. El sinus i el cosinus en la circumferència

Seguint les instruccions de l'escena veiem definits el sinus i el cosinus en la circumferència goniomètrica o de radi unitat.

En el triangle rectangle que es forma, com que la hipotenusa és 1,

el catet oposat és el ____________________

l'adjacent el ____________________



Observa que **(cos α, sin α)** són les coordenades del punt final de l'angle α en la circumferència de radi unitat.

Clica per anar a la següent pàgina.

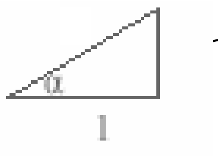
2.c. La tangent en la circumferència

En l'escena es comprèn perquè al quocient entre el catet oposat i el catet adjacent se l'anomena tangent, el seu valor queda definit sobre una recta tangent a la circumferència en el punt (1,0).
Observa en l'escena que quan el catet adjacent val 1, la hipotenusa és igual a la inversa del cos α.

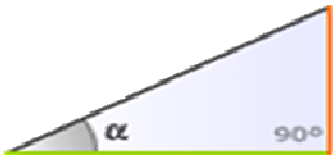
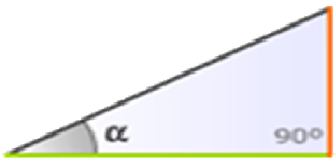
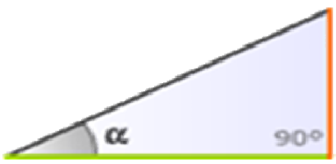
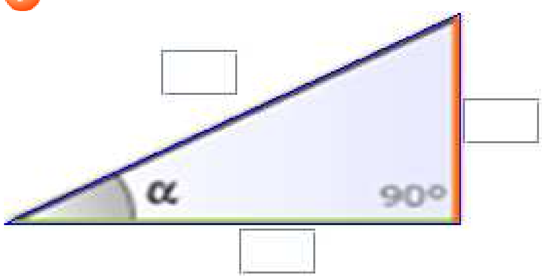
Al quocient: $\dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{catet adjacent}}$

se l'anomena ____________________________ de α i s'abreuja amb ______________________

Completa el triangle

[ ] ←  → [ ]

Clica en el botó per completar els triangles i reconèixer les raons trigonomètriques. Aprofita l'escena per comprovar si els teus resultats sòn correctes.

1 	5 cos(α)= $\dfrac{\square}{\square}$
2 	6 tg (α)= $\dfrac{\square}{\square}$
3 	7  sen α [ ] cos α [ ] tg α [ ]
4 sen(α)= $\dfrac{\square}{\square}$	

Clica per anar a la següent pàgina.

2.d. Les raons de 30º, 45º i 60º

Els angles de 30º, 45º i 60º apareixen freqüentment, fixeu-vos com es calculen les seves raons a partir de la definició si busquem els triangles adequats.

Observa l'escena de la dreta i completa la següent taula:

	Sinus	cosinus	tangent
30º			
45º			
60º			

Memoritzar aquesta taula és fàcil si observes l'ordre que segueixen. Una vegada apresos els sinus amb les arrels consecutives, els cosinus surten en ordre invers.

Clica en el botó per treballar amb l'escena i practicar amb aquestes raons.

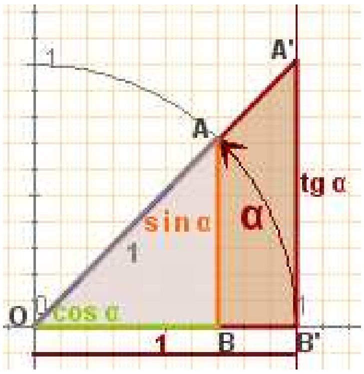
Amb la calculadora	
Donat un angle α obtenir les seves raons trigonomètriques.	***Donada una raó obtenir l'angle α corresponent***
Per exemple el sin 28º 30´ *Posa la calculadora en mode* **DEG** *Fes 28* **o ' "** *30* **o ' "** **sin**. *Obtenim: 0,477158760* *En algunes calculadores cal prémer la tecla* **sin** *abans d'introduir l'angle, comprova com funciona la teva.* *Si volem obtenir el* ***cos α*** *o la* ***tg α*** *procedirem de la mateixa forma però amb les tecles* **cos** *i* **tan** *respectivament.*	*Amb el mateix valor que tens en la pantalla:* **0.477158760** *Comprova que la calculadora segueix en mode* **DEG** *Prem* **SHIFT** **sin** *Obtenim:* **28.5** *en graus, si volem graus, minuts i segons, premem* **SHIFT** **o ' "** *obtenint* **28º 30'**.

Prem per anar a la següent pàgina.

3. Relacions trigonomètriques

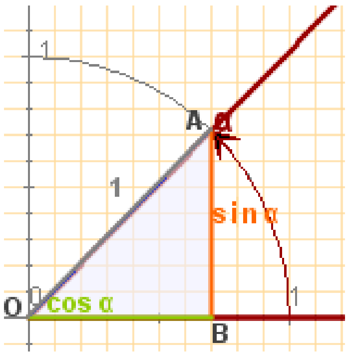
3.a. Relacions trigonomètriques fonamentals

Si s'apliquen la semblança i el teorema de Pitàgores als triangles rectangles "bàsicos", és a dir, amb hipotenusa=1 o amb catet adjacent=1, s'obtindran les relacions fonamentals de la trigonometria:



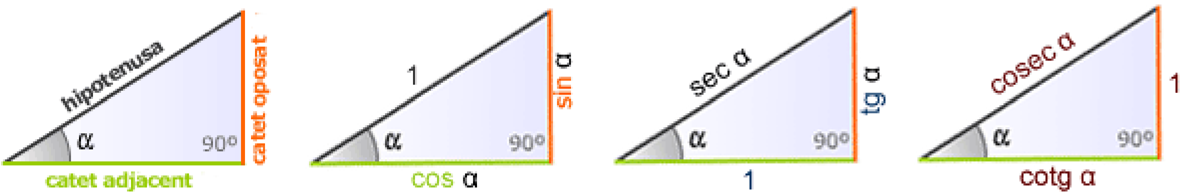
Els triangles OBA i OB'A' són semblants, de manera que:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \underline{\qquad\qquad}$$



Aplicant el Teorema de Pitàgores en el triangle OBA de la figura obtindrem:

En mesurar els costats d'un triangle rectangle es pot prendre com a unitat la hipotenusa, o un dels catets; en aquest cas obtenim els triangles de la figura.

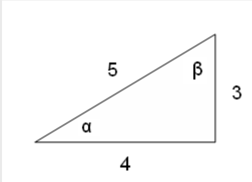


Escriu aquí les relacions

Clica en el botó per comprovar si les has après.

EXERCICIS

5. En el triangle de la figura calcula:



a) sin α d) sin β

b) cos α e) cos β

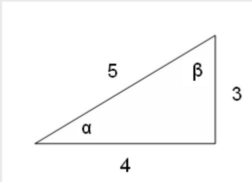
c) tg α f) tg β

6. Calcula amb la calculadora:

a) sin 30º = b) cos 60º = c) tg 45º =

7. Calcula amb la calculadora els angles α i β de l'exercici 5.

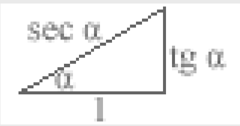
8. Comprova en l'angle α del triangle de la figura que es compleixen les relacions fonamentals



9. Calcula el cosinus i la tangent d'un angle agut α tal que sin α=0,3

10. Comprova que es compleix la relació: $1+ tg^2\,\alpha = sec^2\,\alpha$

Recorda el triangle:



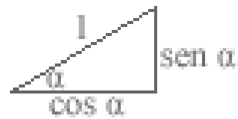
Prem per anar a la següent pàgina.

4. Resolució de triangles rectangles

4.a. Coneguts la hipotenusa i un angle agut

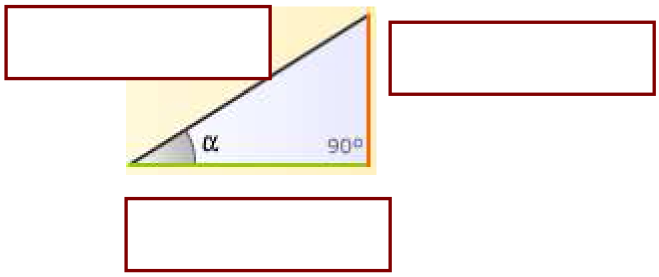
Resoldre un triangle rectangle és calcular les dades desconegudes, costats o angles, a partir de les conegudes.

Per trobar els catets d'un triangle rectangle del qual es coneixen les mesures de la **hipotenusa** i d'un angle agut, pensarem en el triangle que es multiplica per la hipotenusa.

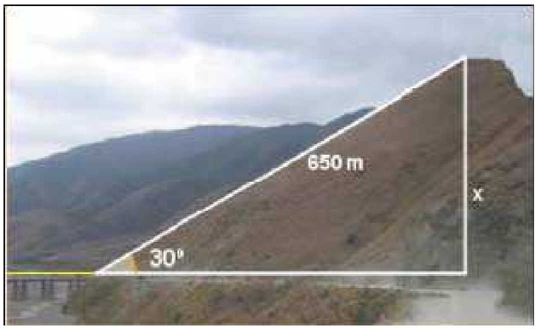


Si cliques pots veure una animació que ho explica.

Completa com quedarà el triangle



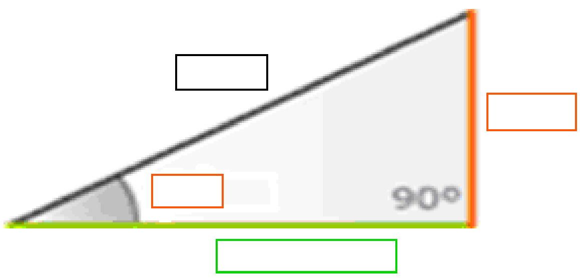
A l'escena pots veure un exemple resolt de com calcular l'altura d'una muntanya.



Completa la resolució en aquest requadre

Clica en el botó per fer un exercici.

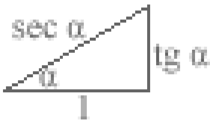
PROBLEMA 1: Completa l'enunciat i resol:
Del triangle rectangle de la figura es coneixen un angle, ______º, i la hipotenusa ______ cm. Hem de trobar els catets en funció de les raons trigonomètriques de l'angle donat



Prem Per anar a la següent pàgina.

4.b. Coneguts un catet i un angle agut

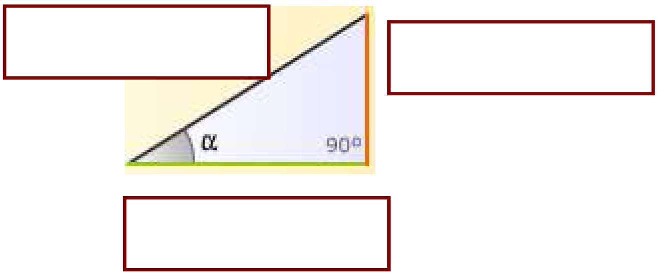
Per trobar els costats d'un triangle rectangle del qual es coneixen les mesures d'un **catet** i d'un angle no recte, pensarem en el triangle



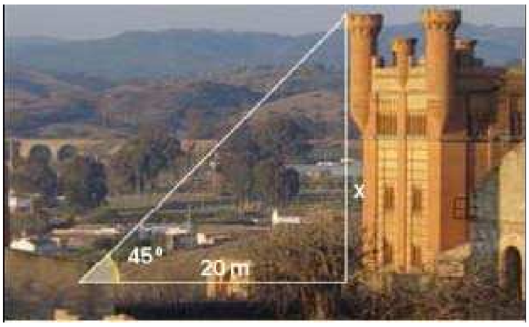
que es multiplica pel catet adjacent:

Si cliques pots veure una animació que ho explica.

Completa com quedarà el triangle



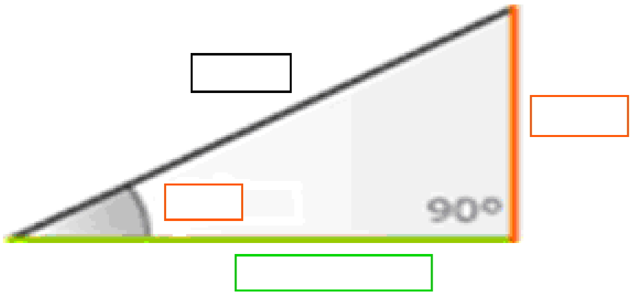
A l'escena podem veure un exemple resolt sobre com calcular l'altura d'una torre



Completa la resolució en aquest requadre

Clica en el botó per fer un exercici.

PROBLEMA 2: Completa l'enunciat i resol el problema:
Del triangle rectangle de la figura es coneixen un angle, ______º, i el catet adjacent ______ cm. Hem de trobar els altres costats en funció de les raons trigonomètriques de l'angle conegut.



Prem per anar a la següent pàgina.

4.c. Coneguts dos costats del triangle

Per trobar l'altre costat del triangle s'aplicarà el teorema de Pitàgores, l'angle es determinarà com l'arc la tangent del qual és

$$\frac{catet\ \ oposat}{catet\ \ adjacent}$$

El seu valor s'obté a la calculadora en prémer la tecla **atg**, una vegada introduït a la pantalla aquest quocient.

o bé com l'arc el sinus del qual és

$$\frac{catet\ \ oposat}{hipotenusa}$$

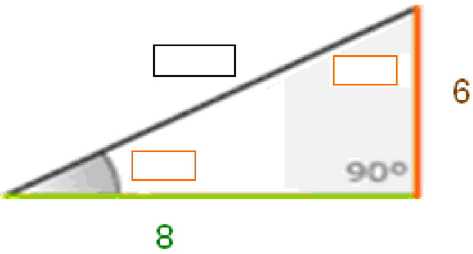
depenent de les dades inicials.

Per calcular l'altre angle n'hi ha prou amb restar de 90º.

En utilitzar la calculadora fixeu-vos si esteu treballant amb graus o amb radiants. Si fas servir la que apareix pitjant sobre aquest botó, apareix il·luminat RAD, Que vol dir que el resultat surt en radiants, prem sobre DEG si vols canviar a graus sexagesimals.	

A l'escena podem veure un exemple resolt sobre això; si mous el punt taronja del vèrtex superior pots modificar la grandària del triangle.

Amb l'ajuda d'aquesta escena, resol el triangle de catets 8 i 6



$$hipotenusa = \sqrt{\qquad\qquad} =$$

$$a\tan\left(\frac{\quad}{\quad}\right) =$$

$$90º - \qquad =$$

Clica en el botó per veure un cas particular del Teorema de Pitàgores

Mètode de càlcul:

1. Escriu el teorema de Pitàgores	
2. Aïlla un dels catets	
3. Fixa't que el segon membre de la igualtat es correspon amb una igualtat notable, que has d'escriure a continuació:	
4. Aplica aquesta igualtat notable al pas 2	
5. Aïlla el catet	
6. Escriu ara el cas particular en que el catet i la hipotenusa difereixen en una unitat	

Prem per anar a la següent pàgina.

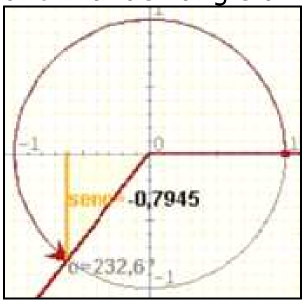
5. Raons trigonomètriques d'angles qualssevol

5.a. Sinus d'un angle qualsevol

Recorda que la circumferència goniomètrica és una circumferència de radi unitat i centre l'origen de coordenades; en ella **(cosα, sinα)** són les coordenades del punt final de l'angle α.

Això que vam veure pels angles aguts podem fer-ho extensible a angles qualssevol.

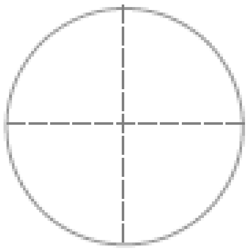
El **sinus** d'un angle és la **coordenada vertical** del punt final del recorregut de l'angle sobre la circumferència goniomètrica. Observa que el seu valor està entre -1 i 1.



Arrossega la punta de la fletxa per fer variar l'angle i amb ell el valor del sinus. →

Fixa't a l'escena com varia el signe que pren el sinus segons el quadrant en que estigui l'angle.

Escriu els signes a la circumferència →



Observa també que sin(360º-α)=____________

i que sin(180º-α)= ___________

Quants angles amb sinus igual a -1/2 hi ha entre 0º i 360º? ____________________________

Clica en el botó per veure un exercici resolt

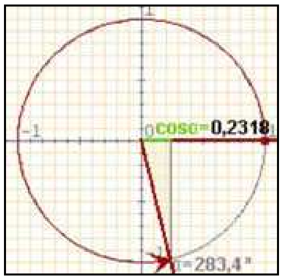
Prem per anar a la següent pàgina.

5.b. Cosinus d'un angle qualsevol

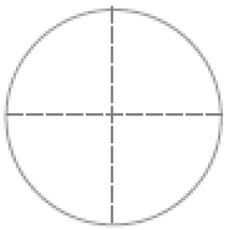
De la mateixa manera que el sinus d'un angle és l'ordenada, el **cosinus** és l'**abscissa** del punt final del recorregut que marca l'angle en la circumferència.

El cosinus d'un angle pot prendre tots els valors entre -1 i 1.

Fixa't a l'escena com varia el signe que pren el cosinus segons el quadrant en que estigui l'angle.



Escriu els signes a la circumferència →



Observa que (360º-α) = ___________

i que cos(180º-α)=. __________

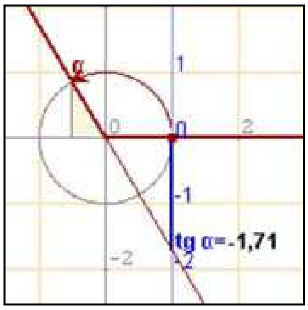
Quants angles amb cosinus igual -1/2 hi ha entre 0º i 360º?_________________________

Clica en el botó per veure un exercici resolt

Prem per anar a la següent pàgina.

5.c. Tangent d'un angle qualsevol

Amb la relació fonamental **tg α=sinα/cosα** s'amplia la definició de tangent en angles aguts a un angle qualsevol.
Observa que la tangent es representa en la recta tangent a la circumferència goniomètrica en el punt on s'inicia l'angle.



Què passa amb el valor del cosinus pels angles de 90º i 270º?

____

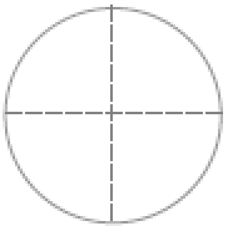
Què passa aleshores amb la tangent per aquests angles?

____

Per què? ____

Fixa't en l'escena com varia el signe que pren la tangent segons el quadrant en que estigui l'angle.

Escriu els signes en la circumferència →



Quants angles hi ha entre 0º i 360º que tinguin tangent igual a 2? ____________________

Clica en el botó per veure un exercici resolt.

Prem per anar a la següent pàgina.

EXERCICIS

11. Dibuixa un angle del tercer quadrant en el que el cosinus sigui igual a -0,6 i calcula'n el sinus i la tangent

12. Calcula cosα sabent que tg α=-2 i que α és del quart quadrant.

6. Aplicacions de la trigonometria

6.a. Resolució de problemes mètrics

La trigonometria és útil per resoldre problemes geomètrics i calcular longituds a la realitat. Amb un teodolit com el de la fotografia, es poden mesurar angles, tant en el pla vertical com en l'horitzontal, que ens permeten, aplicant les raons trigonomètriques, trobar distàncies o calcular altures de punts inaccessibles.

En aquests casos encara que el triangle de partida no sigui rectangle, traçant la seva altura podem obtenir dos triangles rectangles que es podran resoldre amb les dades que tenim.

A l'escena pots veure alguns exemples.

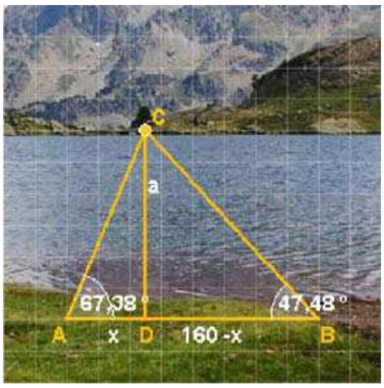
Calcular àrees de polígons regulares

L'escena ens permet calcular pas a pas l'àrea de polígons regulares, de 5 a 10 costats, completa la taula següent amb els exemples de l'escena

Longitud del costat	Nombre de costats	Angle central	Tangent de l'angle	Apotema	Perímetre	Àrea

Calcular mesures topogràfiques

Per mesurar l'amplada d'un riu s'han pres les mides dels angles de la figura des de dos punts d'una vora distants 160 m. Quina amplada té el riu?



L'amplada del riu és l'altura del triangle **ACB** que no és rectangle, però sí que ho són els triangles **ADC** i **BDC**

Al triangle **ADC** $\text{tg}\,67{,}38^\circ = \frac{\quad}{\quad} \Rightarrow$ a =

Al triangle **BDC** $\text{tg}\,47{,}48^\circ = \frac{\quad}{\quad} \Rightarrow$ a =

Obtenim, doncs, un sistema de dues equacions que resolem per igualació.

$$\begin{cases} a = \\ a = \end{cases}$$

Prem per anar a la següent pàgina.

NOM: ______________________ INS ______________________ DATA: / /

Recorda el més important – RESUM

Els angles i la seva mesura

Per mesurar angles emprem ______________ o ______________.

Un **radiant** és ____

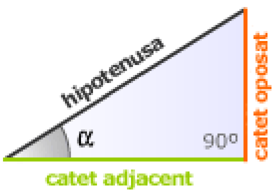
De graus a radiants

1 grau = $\frac{\pi}{180}$ radiants

De radiants a graus

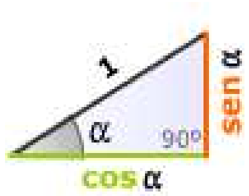
1 radiant = $\frac{180}{\pi}$ **graus**

Raons trigonomètriques



$\sin\alpha = \_\_\_\_$ $\cos\alpha = \_\_\_\_$ $\text{tg}\,\alpha = \_\_\_\_$

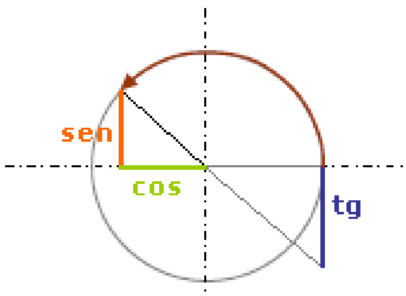
Relacions fonamentals



Entre el sinus i el cosinus

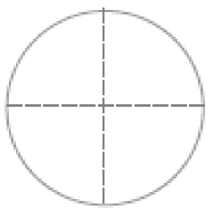
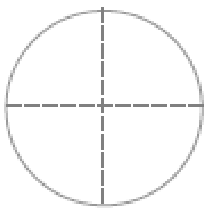
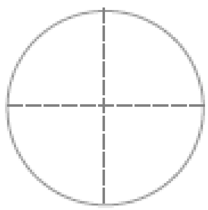
Entre el sinus, el cosinus i la tangent

Raons de qualsevol angle



(cos α, sin α) són les **coordenades** del punt final de l'angle α en la circumferència goniomètrica o de radi unitat.

Signes de les raons trigonomètriques

Sinus	Cosinus	Tangent
		

Resoldre un triangle rectangle

Consisteix a ____

____.

Prem per anar a la següent pàgina.

Per practicar

Practica ara resolent diferents EXERCICIS. En les següents pàgines trobaràs EXERCICIS de:

Mesura d'angles
Relacions fonamentals
Resolució de triangles

Completa l'enunciat amb les dades que apareixen en cada EXERCICI a la pantalla i després el resols.

És important que primer el facis tu i després comprovis a l'ordinador si ho has fet bé.

Mesura d'angles.

Passar de graus a radiants (fes com a mínim quatre exercicis)

1. Expressa en radiants l'angle de: a. _______ graus b. _______ graus c. _______ graus d. _______ graus	a. b. c. d.

Passar de radiants a graus (fes com a mínim quatre eercicis)

2. Expressa en graus l'angle de: a. _______ radiants b. _______ radiants c. _______ radiants d. _______ radiants	a. b. c. d.

Relacions fonamentals.

Raó coneguda: SINUS Calcular: COSINUS

3. Si **α** és un angle del quadrant_________ i **sinα=** ________, calcula **cos α**	
4. Si α és un angle del quadrant__________ i **sinα=** ________, calcula **cos α**	

Raó coneguda: SINUS Calcular: TANGENT

5. Si **α** és un angle del quadrant__________ i **sin α=**________, calcula **tg α**	
6. Si α és un angle del quadrant__________ i **sin α**=________, calcula **tg α**	

Raó coneguda: COSINUS Calcular: SINUS

7. Si **α** és un angle del quadrant__________ i **cos α=**________, calcula **sin α**	
8. Si α és un angle del quadrant__________ i **cos α**=________, calcula **sin α**	

Raó coneguda: COSINUS Calcular: TANGENT

9. Si **α** és un angle del quadrant__________ i **cos α=**________, calcula **tg α**	
10. Si α és un angle del quadrant__________ y **cos α**=________, calcula **tg α**	

Raó coneguda: TANGENT Calcular: SINUS

11. Si **α** és un angle del quadrant__________ i **tg α=**________, calcula **sin α**	
12. Si α és un angle del quadrant__________ i **tg α**=________, calcula **sin α**	

Raó coneguda: TANGENT **Calcular: COSINUS**

13. Si **α** és un angle del quadrant__________ i **tg α=**________, calcula **cos α**	
14. Si α és un angle del quadrant__________ i **tg α**=________, calcula **cos α**	

Resolució de triangles.

El costat d'un polígon

15. La longitud del **radi** d'un polígon regular de _____ costats és de ________. Calcula el costat.	
16. La longitud de l'**apotema** d'un polígon regular de _____ costats és de ________. Calcula el costat.	

L' apotema d'un polígon

17. La longitud del **radi** d'un polígon regular de _____ costats és de ______. Calcula l'apotema.	
18. La longitud del **costat** d'un polígon regular de _____ costats és de ______. Calcula l'apotema.	

L'àrea d'un polígon

19. La longitud del **costat** d'un polígon regular de _____ costats és de ______. Calcula l'àrea.	
20. La longitud de l'**apotema** d'un polígon regular de _____ costats és de ______. Calcula la superfície.	

El radi d'un polígon

21. La longitud de l'**apotema** d'un polígon regular de _____ costats és de ______. Calcula el radi.	
22. La longitud del **costat** d'un polígon regular de _____ costats és de ______. Calcula el radi.	

L'altura d'un avió

23. Dues persones veuen un avió que les sobrevola a una altura de ______m, amb angles d'elevació de _____º i _____º. A quina distància es troben les dues persones?	

L'altura d'un arbre

24. Determina l'altura d'un arbre si des d'un punt situat a ______ de la seva base se n'observa la seva copa amb un angle de ______graus	

L'altura de una cometa

25. La longitud del fil que subjecta un estel és de _______m. Si l'angle d'elevació de l'estel és de ______º, quina altura assoleix l'estel?	

L'altura d'un edifici

26. Per calcular l'altura d'un edifici es mesuren els angles d'elevació des de dos punts situats a ________m. Quina és l'altura de l'edifici si els angles són _______º i ________º?	

L'altura d'una muntanya

27. Per mesurar l'altura d'una muntanya es mesuren els angles d'elevació des de dos punts situats a una distància de _________m i a una altura de _______m sobre el nivell del mar. Quina és l'altura de la muntanya si els angles són ______º i ________º?	

Autoavaluació

Completa aquí cada un dels enunciats que pots veure a l'ordinador. Resol el problema i després introdueix el resultat per comprovar si la teva solució és correcta.

1	Expressa en radiants l'angle de la figura ___________	
2	Calcula el valor de tg A al triangle de la figura:	
3	Calcula l'àrea del triangle de la figura.	
4	Amb un compàs de ________ de longitud hem traçat una circumferència de ______cm de radi, quin angle, en radiants, formen les branques del compàs?	
5	Si sinα = _______, i α és un angle __________, calcula la tg α.	
6	Si tg α=_______ i α és un angle del ______ quadrant, calcula el cos α.	
7	A partir de les raons de l'angle de _____, calcula _______ de l'angle de ______________	
8	Si cos α = _________, i α és un angle ______, calcula el _________________.	
9	L'altura de Torrespaña és de 231 m. Quant fa l'ombra de l'edifici quan la inclinació dels raigs del sol és de ______?	
10	Calcula l'àrea del polígon regular de la figura	

Per practicar més

1. Expressa en radiants:

a) 15º b) 120º
c) 240º d) 345º

2. Expressa en graus:

a) $\frac{\pi}{15}$ b) $\frac{3\pi}{10}$
c) $\frac{7\pi}{12}$ d) $\frac{11\pi}{6}$

3. Troba amb la calculadora les següents raons trigonomètriques arrodonint a les centèsimes:

a) sin 25º b) cos 67º
c) tg 225º d) tg 150º

4. Un angle d'un triangle rectangle mesura 47º i el catet oposat 8 cm, troba la hipotenusa.

5. La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 26 cm i un angle 66º. Calcula els catets.

6. Un angle d'un triangle rectangle mesura 44º i el catet adjacent 16 cm, calcula l'altre catet.

7. En un triangle rectangle els catets mesuren 15 i 8 cm, troba els angles aguts.

8. La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 45 cm i un catet 27 cm, calcula els angles aguts.

9. En un triangle isòsceles els angles iguals mesuren 78º i l'altura 28 cm, troba el costat desigual

10. Els costats iguals d'un triangle isòsceles mesuren 41 cm i els angles iguals 72º, calcula l'altre costat.

11. El cosinus d'un angle agut és 3/4, calcula el sinus de l'angle.

12. La tangent d'un angle agut és 12/5, calcula el sinus.

13. El $\sin\alpha = 3/5$ i α és un angle del segon quadrant, calcula la tg α.

14. El $\cos\alpha = 3/5$ i α és un angle del quart quadrant, calcula la tg α.

15. La tg $\alpha = 3$ i α és un angle del tercer quadrant, calcula el $\cos\alpha$.

16. L'apotema d'un polígon regular de 9 costats mesura 15 cm, calcula el costat.

17. El costat d'un hexàgon regular mesura 30 cm, calcula l'apotema.

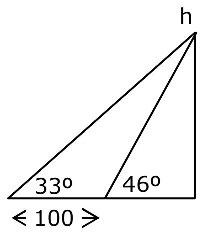
18. L'apotema d'un octògon regular mesura 30 cm, calcula l'àrea del polígon.

19. La longitud del radi d'un pentàgon regular és 15 cm. Calcula l'àrea.

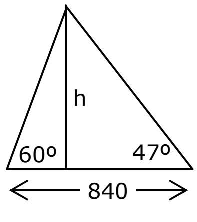
20. L'ombra d'un arbre quan els raigs del sol formen amb l'horitzontal un angle de 36º, mesura 11 m. Quina és l'altura de l'arbre?.

21. El fil d'un estel mesura 50 m de llarg i forma amb l'horitzontal un angle de 37º, a quina altura vola l'estel?

22. Per mesurar l'altura d'un edifici es mesuren els angles d'elevació des de dos punts separats per 100 m. Quina és l'altura si els angles són 33º i 46º?



23. Dues persones que es troben separades per 840 m, veuen alhora un avió amb angles d'elevació respectius de 60º i 47º, a quina altura vola l'avió?



24. Per mesurar l'altura d'una muntanya es mesuren angles d'elevació des de dos punts separats per 480 m i situats a 1200 m sobre el nivell del mar. Quina és l'altura si els angles són de 45º i 76º?