



Probabilitat

Continguts

1. Experiments aleatoris
 - Espai mostral i esdeveniments
 - Operacions amb esdeveniments
 - Esdeveniments incompatibles
2. Probabilitat d'un esdeveniment
 - La regla de Laplace
 - Freqüència i probabilitat
 - Propietats de la probabilitat
 - Calcular probabilitats
3. Experiments compostos
 - Esdeveniments compostos
 - Regla de la multiplicació
 - Extraccions amb i sense devolució
4. Probabilitat condicionada
 - Esdeveniments dependents i independents
 - Diagrames d'arbre
 - Probabilitat total
 - Probabilitat "a posteriori"

Objectius

- Trobar els esdeveniments d'un experiment aleatori i realitzar operacions amb ells.
- Determinar si dos esdeveniments són compatibles o incompatibles.
- Calcular la probabilitat d'un esdeveniment mitjançant la regla de Laplace.
- Conèixer les propietats de la probabilitat.
- Trobar la probabilitat d'un esdeveniment en un experiment compost.
- Trobar probabilitats d'esdeveniments dependents i independents.
- Aplicar la probabilitat a situacions de la vida quotidiana.

Abans de començar

Investiga

Imagina't que estàs en un concurs de televisió en el qual t'ofereixen tres portes i n'has de triar una.

Darrera d'una de les portes hi ha un cotxe i darrera de cada una de les altres, un burro.

Tries una porta, però abans d'obrir-la, el presentador, que sap el que hi ha darrera de cada una, obre una de les dues que no has triat, darrera la qual, per suposat hi ha un burro, i aleshores, et dona l'oportunitat de canviar la teva tria.

Naturalment vols emportar-te el cotxe, què faries, canviar de porta o no canviar?

Abans de decidir, anem a experimentar jugant. Pots jugar tu o bé fer que jugui automàticament; després de diferents intents escriu els resultats:



Manual	Canviant	Mantenint	Total
Intents			
Cotxes			
% encerts			

Automàtic	Canviant	Mantenint	Total
Intents			
Cotxes			
% encerts			

CONTESTA


RESPOSTA

Quan tries tu, com aconseguixes més cotxes, canviant o mantenint?	
Quan es tria automàticament, com s'aconsegueixen més cotxes, canviant o mantenint?	
Després de lo vist, si vols emportar-te el cotxe, què faries, canviar de porta o no canviar?	



Si fas una aposta a la Bonoloto, quina probabilitat tens d'encertar els 6 números?

I tres? _____

Clica  per anar a la pàgina següent.

1. Experiments aleatoris

1.a. Espai mostral i esdeveniments

Llegeix les definicions de la pantalla i completa:

Són experiments **aleatoris**, aquells en els quals _____

S'anomena espai **mostral** _____


Un **esdeveniment elemental** és _____

Un **esdeveniment** és _____

Hi ha un esdeveniment que es verifica sempre _____ i coincideix amb el _____

Fixa't en l'escena. Podem extreure de forma aleatòria una carta de la baralla. Apareixen diversos esdeveniments, i si moum el ratolí per sobre d'ells, apareixen els esdeveniments elementals que els formen. Amb l'ajuda de l'escena, completa aquesta taula:

ESDEVENIMENT	ESDEVENIMENTS ELEMENTALS
Treure el rei d'oros	
Treure oros o rei	
Treure una figura	

Clica  per anar a la pàgina següent.

1.b. Operacions amb esdeveniments

Llegeix les definicions de la pantalla i completa:

Amb els esdeveniments d'un experiment aleatori es poden realitzar diferents operacions.


Donats dos esdeveniments A i B:

- La **unió** de A i B, **$A \cup B$** , és l'esdeveniment format per _____
Ocorre quan _____
- La **intersecció**, **$A \cap B$** , és l'esdeveniment format pels _____
Ocorre quan _____
- La **diferència** de A i B, **$A \setminus B$** , és l'esdeveniment format per _____
Ocorre quan _____
- L'**esdeveniment contrari** a un de donat A, **\bar{A}** , és l'esdeveniment format per _____
Ocorre quan _____
- L'esdeveniment contrari del **segur** és l'esdeveniment _____, que no es verifica mai, i que s'indica amb \emptyset .

A l'escena pots veure un exemple de diferents esdeveniments i els seus contraris:

En una urna hi ha 12 boles numerades del 1 al 12. Es treu una bola i es mira el número, i considerem els esdeveniments: A= "sortir parell" i B= "sortir múltiple de 3". Escriu a continuació els esdeveniments elementals que formen els esdeveniments indicats a la taula:

A		\bar{A}	
B		\bar{B}	
$A \cup B$		$\overline{A \cup B}$	
$A \cap B$		$\overline{A \cap B}$	
$A \setminus B$		$\overline{A \setminus B}$	
$B \setminus A$		$\overline{B \setminus A}$	

Clica  per anar a la pàgina següent.

1.c. Esdeveniments compatibles e incompatibles

Llegeix les definicions de la pantalla i completa:

En un experiment aleatori hi ha esdeveniments que poden ocórrer alhora i d'altres que no.

- Dos esdeveniments es diuen **compatibles** si _____. En aquest cas, $A \cap B \neq \emptyset$, _____ ocórrer alhora.
- Dos esdeveniments es diuen **incompatibles** si no _____. En aquest cas, $A \cap B = \emptyset$, _____ ocórrer alhora.

Un esdeveniment i el seu contrari són sempre _____, però dos esdeveniments incompatibles no sempre són _____.

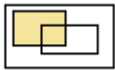
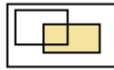
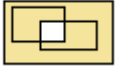
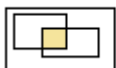
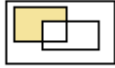
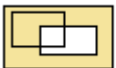
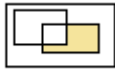
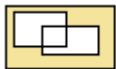
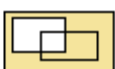
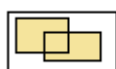
Donat l'**Espai mostral** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, i els esdeveniments: **Vermell** = {1, 4, 7, 10}, **Verd** = {1, 2, 3}, **Blau** = {3, 6, 9, 12}, **Gris** = {7, 8, 9} i **Taronja** = {3, 5, 7}, amb l'ajuda de l'escena digués si són compatibles o no els esdeveniments:


ESDEVENIMENTS	COMPATIBLES / INCOMPATIBLES	ESDEVENIMENTS	COMPATIBLES / INCOMPATIBLES
Verd i vermell		Vermell i blau	
Verd i blau		Verd i groc	
Blau i gris		Vermell i groc	
Verd i gris		Groc i gris	
Vermell i gris		Groc i blau	

Clica el botó  per fer uns exercicis.

Observa els dibuixos i raona quin conjunt és cada un d'ells. Quan els tinguis tots clica "Comprovar"

Completa els resultats en aquesta taula:

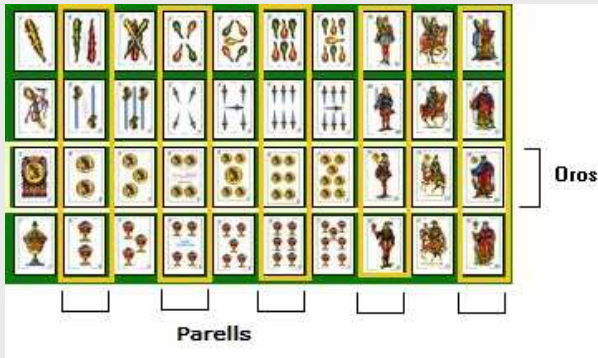
A = 		B = 	
1 		2 	
3 		4 	
5 		6 	
7 		8 	

Clica  per anar a la pàgina següent.

EXERCICIS

- En una bossa tenim tres boles numerades com a 1, 2 i 3. Considerem l'experiment d'extreure una bola i anotar-ne el número. Escriu tots els esdeveniments possibles. Indica quins d'ells són els elementals.

- En una baralla, sota l'experiment d'extreure una carta, considera els esdeveniments: a) parell, b) oros, c) parell i oros, d) parell o oros, e) parell menys oros, f) oros menys parell i g) no parell. Escriu els esdeveniments elementals que els formen.



- En tirar un dau considerem els esdeveniments: $A = \{\text{parell}\}$, $B = \{\text{més gran que } 3\}$, i $C = \{\text{senar}\}$. Dels tres parells d'esdeveniments possibles AB, AC y BC, indica quins són compatibles i/o incompatibles.

Clica per anar a la pàgina següent.

2. Probabilitat d'un esdeveniment

2.a. La regla de Laplace

Llegeix les definicions de la pantalla.

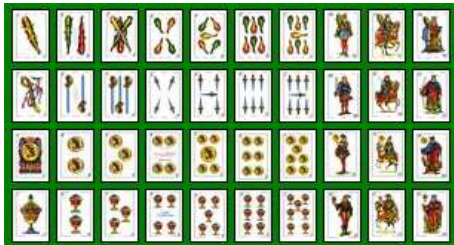
CONTESTA AQUESTES QÜESTIONS:	RESPOSTES
Quan diem que un experiment aleatori és regular ?	
Què significa que els esdeveniments elementals són equiprobables ?	
Donat un esdeveniment A, a què anomenem casos favorables ? I casos possibles ?	
Podem aplicar sempre la regla de Laplace ? Si la resposta és negativa, indica quan es pot aplicar.	

A continuació escriu la fórmula de la **Regla de Laplace**

$$P(A) = \frac{\text{nre. casos}}{\text{nre. casos}}$$

Amb l'ajuda de l'escena de la dreta, calcula les següents probabilitats

Extraiem una carta d'una baralla de 40



ESDEVENIMENTS	PROBABILITAT
Que sigui d'un coll determinat	
Que sigui d'un núm. determinat	
Que sigui un as o un basto	
Que sigui un as i un basto	
Que no sigui ni as ni basto	

Clica el botó



per fer uns exercicis.

Considerant els experiments, calcula les probabilitats:

Llançar un dau

Treure una carta de la baralla (40 cartes)

$P(\text{parell}) =$

$P(\text{senar}) =$

$P(\text{oros o espases}) =$

$P(3 \text{ de bastos}) =$

$P(>4) =$

$P(2 \text{ o } 6) =$

$P(\text{oros}) =$

$P(\text{bastos}) =$

$P(3) =$

$P(>2 \text{ i } <5) =$

$P(\text{rei}) =$

$P(\text{bastos o copes}) =$

$P(<5 \text{ i parell}) =$

$P(>2 \text{ o } <5) =$

$P(\text{rei d'oros}) =$

$P(\text{figura}) =$

$P(3 \text{ o parell}) =$

$P(>3 \text{ i } <5) =$

$P(\text{un } 3) =$

$P(\text{figura de bastos}) =$

Clica



per anar a la pàgina següent.

2.b. Freqüència i probabilitat

Llegeix les definicions de la pantalla i completa:

La **freqüència absoluta** d'un esdeveniment és _____
 _____. La **freqüència relativa** és _____.

La **lleï dels grans nombres** diu que quan repetim un experiment _____

Com a conseqüència de la lleï dels grans nombres, tenim una nova **definició de probabilitat** d'un esdeveniment com _____

A l'escena de la dreta es simula el llançament de tres monedes; a partir dels resultats dels llançaments, compara les probabilitats i les freqüències dels esdeveniments:

Nre. de llançaments	>100	>200	>500	>1000		
fr(0 cares)=					P(0 cares)=	
fr(1 cares)=					P(1 cares)=	
fr(2 cares)=					P(2 cares)=	
fr(3 cares)=					P(3 cares)=	

CONTESTA AQUESTES QÜESTIONS:

RESPOSTES

Com és la probabilitat d'obtenir zero cares, major o menor que la seva freqüència?	
Com és la probabilitat d'obtenir dues cares, major o menor que la seva freqüència?	
Quan s'assemblen més les freqüències, amb 100 llançaments o amb més de 1000? Per què?	


Clica el botó  per fer uns exercicis.

Tires tres daus i sumes els resultats.

En una aposta, quin és el resultat més avantatjós?

Seguint les indicacions de l'escena, fes més de 3000 tirades, i observant els resultats, calcula les següents probabilitats:

P(3)=	P(4)=	P(5)=	P(6)=
P(7)=	P(8)=	P(9)=	P(10)=
P(11)=	P(12)=	P(13)=	P(14)=
P(15)=	P(16)=	P(17)=	P(18)=

Clica  per anar a la pàgina següent.

2.c. Propietats de la probabilitat

Vista la relació entre freqüència relativa i probabilitat, es compleix que:

- La probabilitat d'un esdeveniment és un nombre _____.
- La probabilitat de l'**esdeveniment segur** és _____ i la de l'**esdeveniment impossible** és _____.
- La probabilitat de la **unió de dos esdeveniments incompatibles** és _____.

I d'aquestes es dedueix a més que:

- La probabilitat de l'**esdeveniment contrari** és $p(\bar{A}) =$ _____.
- La probabilitat de la **unió de dos esdeveniments compatibles** és _____.

Si cliques a **Aplicacions** veuràs un exemple en el qual es calcula la probabilitat de la intersecció de dos esdeveniments i un altre en el qual s'aplica la probabilitat de l'esdeveniment contrari.

A l'escena de la dreta hi ha un exemple resolt:

En una urna hi ha 10 boles numerades del 1 al 10.

Es treu una bola i es mira el número.

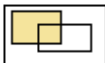

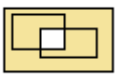
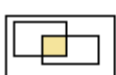
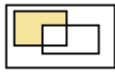
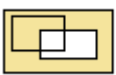
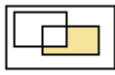
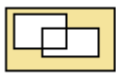
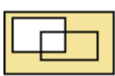
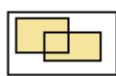
Considerem els esdeveniments: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.


Amb l'ajuda de l'escena escriu la probabilitat dels esdeveniments de la taula:

$p(A)$	$p(A \cap B)$	$p(\bar{A})$	$p(\overline{A \cap B})$
$p(B)$	$p(A \setminus B)$	$p(\bar{B})$	$p(\overline{A \setminus B})$
$p(A \cup B)$	$p(B \setminus A)$	$p(\overline{A \cup B})$	$p(\overline{B \setminus A})$

Clica el botó  per fer un exercici.

Si $p(A) = 0.5$, $p(B) = 0.4$ i $p(A \cap B) = 0.2$; calcula la probabilitat dels següents esdeveniments:

A = 		B = 	
1 		2 	
3 		4 	
5 		6 	
7 		8 	

Clica  per anar a la pàgina següent.

2.d. Calcular probabilitats

En aquesta pàgina apareixen dues escenes per a que practiquis calculant les probabilitats que es proposen amb la diana i la ruleta.

Clica el botó  per fer uns exercicis.

Fes exercicis fins que el nombre d'encerts sigui superior a 10.

EXERCICIS

4. Tenim un dau de 20 cares $\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,6,6,6,6,6\}$ perfectament equilibrat. Quina és la probabilitat d'obtenir cada un dels resultats possibles?
5. Si llancem el dau anterior 1000 cops, quantes vegades s'espera que surti cada resultat aproximadament?
6. Per al dau $\{1,1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5\}$ de 20 cares, calcula les probabilitats següents:
 - a) $P(\text{parell}) =$
 - b) $P(\text{més gran que } 3) =$
 - c) $P(\text{parell i més gran que } 3) =$
 - d) $P(\text{parell o més gran que } 3) =$
 - e) $P(\text{parell menys més gran que } 3) =$
 - f) $P(\text{més gran que } 3 \text{ menys parell}) =$
 - g) $P(\text{no parell}) =$
7. En una bossa tenim 7 boles vermelles, 9 boles blaves i 4 verdes. Extraiem una bola, calcula la probabilitat que:
 - a) No sigui vermella
 - b) Sigui verda
 - c) Sigui vermella o blava
8. En un grup, el 40% juga a bàsquet i el 60% a futbol, sabent que el 85% practica algun de los dos esports, quin percentatge juga a tots dos?



9. En el grup A hi ha 18 persones, de les quals 10 parlen anglès i 8 no; en el B hi ha 12 persones, de les quals 3 parlen anglès i 9 no; i en el C hi ha 10 persones, 3 que parlen anglès i 7 que no. Triem al atzar una persona de cada grup, calcula la probabilitat que de les tres, al menys una parli anglès.

Del A	Del B	Del C
I speak English	I speak English	I speak English
I speak English	I speak English	No parlo anglès
I speak English	No parlo anglès	I speak English
No parlo anglès	I speak English	I speak English
I speak English	No parlo anglès	No parlo anglès
No parlo anglès	I speak English	No parlo anglès
No parlo anglès	No parlo anglès	I speak English

Clica  per anar a la pàgina següent.


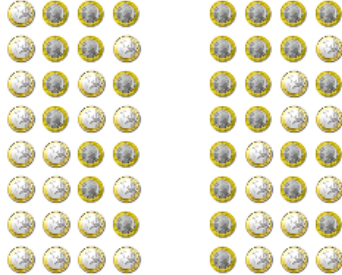
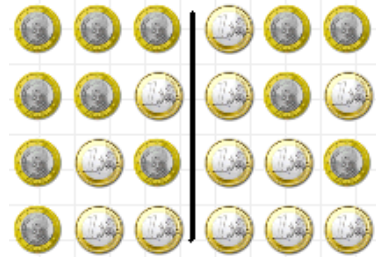
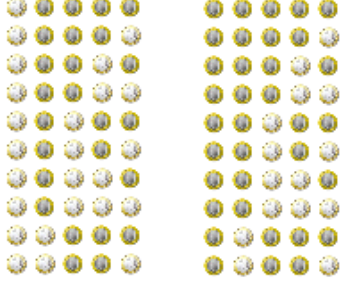
3. Experiments compostos

3.a. Esdeveniments compostos

Un **experiment compost** és el que _____

Per a calcular l'espai mostral d'un experiment compost convé, en moltes ocasions, fer un diagrama d'arbre que representi totes les opcions. Cada resultat ve donat per un camí del diagrama. Observa a l'escena com es construeix el diagrama d'arbre de l'exemple i com s'utilitza per a calcular la probabilitat de cada esdeveniment.

Clica el botó  per fer un exercici.

PROBABILITAT AMB N MONEDES EXPERIMENT: Llançar N monedes equilibrades. Calcula la probabilitat en cada cas:	
CAS 1: 2 Monedes 	CAS 3: 4 Monedes 
CAS 2: 3 Monedes 	CAS 4: N Monedes 

Clica  per anar a la pàgina següent.

3.b. Regla de la multiplicació

Si et fixes en l'exemple anterior, en indicar la probabilitat de cada branca del camí, s'obté la probabilitat de cada esdeveniment compost calculant el producte dels respectius esdeveniments simples.



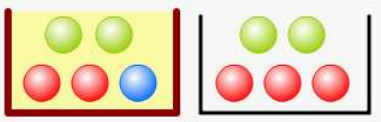
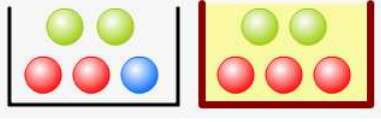
La probabilitat d'un **esdeveniment** en un experiment **compost** és _____


A les escenes de la dreta pots practicar aquest resultat, observa, en primer lloc, l'exemple i després practica en l'altra escena. Escribe a continuació dos dels exercicis que hagis resolt bé:

EXERCICI 1	EXERCICI 2
$p(A)=$ $p(N)=$ $p(V)=$	$p(A)=$ $p(N)=$ $p(V)=$

Clica el botó  per fer un exercici.

Tenim dues urnes, A i B, amb boles vermelles, verdes i blaves. Llancem un dau, si surt 1 o 2 traiem una bola de A, i si surt 3, 4, 5 o 6 de B

			
			
$p(A \text{ i } R) = \text{---} . \text{---} = \text{---}$	$p(A \text{ i } V) = \text{---} . \text{---} = \text{---}$	$p(A \text{ i } A) = \text{---} . \text{---} = \text{---}$	
$p(B \text{ i } R) = \text{---} . \text{---} = \text{---}$	$p(B \text{ i } V) = \text{---} . \text{---} = \text{---}$	$p(B \text{ i } V) = \text{---} . \text{---} = \text{---}$	

Clica  per anar a la pàgina següent.

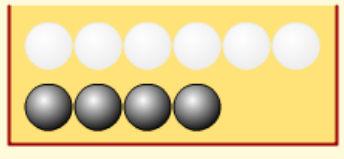
3.c. Extraccions amb i sense devolució

Un exemple d'experiment compost el trobem en l'extracció successiva de cartes o de boles d'una urna... En aquests casos s'ha de considerar si es torna la carta, bola, etc. abans de treure la següent o no.

A la pàgina hi ha dues escenes que es corresponen amb dos exemples diferents, un d'extracció de boles i un altre d'extracció de cartes; practica amb elles abans de fer l'exercici.

Clica el botó  per fer un exercici.

En una urna hi ha 6 boles blanques i 4 negres. Traiem dues boles, una després l'altra. Fes el diagrama d'arbre en cada cas:

	Amb devolució	Sense devolució
Calcula les següents probabilitats:	Amb devolució	Sense devolució
quina és la probabilitat que les dues siguin blanques?		
quina és la probabilitat que la 1a sigui blanca i la 2a negra?		
quina és la probabilitat que les dues siguin negres?		

Clica  per anar a la pàgina següent.

4. Probabilitat condicionada

4.a. Esdeveniments dependents i independents

Quan es realitzen observacions de diversos esdeveniments pot ser que un depengui de l'altre.

S'anomena **probabilitat condicionada**, de B a A, i s'escriu **p(B/A)** a la probabilitat que

$$P(B / A) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Si cliques l'enllaç **Per què?**, veuràs la demostració d'aquesta fórmula.

Donats dos esdeveniments, es diu que són **independents** si _____

Donats dos esdeveniments, es diu que són **dependents** si _____

- A i B **independents**: $P(B/A) = \underline{\hspace{2cm}}$
- A i B **independents**: $P(A \cap B) = \underline{\hspace{2cm}}$

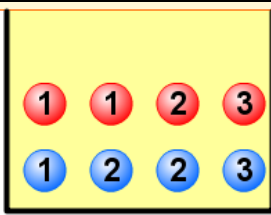
A l'escena de la dreta tens un exemple d'esdeveniments dependents; segueix les instruccions per veure l'explicació.

Clica el botó  per fer l'exercici.

Primer fes tu els càlculs i comprova a l'escena després.

Fixa't bé en les boles numerades que conté l'urna. Anem a extreure una bola, volem esbrinar si tindràs premi.


Segueix les instruccions de l'escena per veure la teva probabilitat de premi.



Número	Vermella	Blau
p(1)=	p(1/vermella)=	p(1/blau)=
p(2)=	p(2/vermella)=	p(2/blau)=
p(3)=	p(3/vermella)=	p(3/blau)=

Explica a continuació quins esdeveniments són independents i per què:

Explica a continuació quins esdeveniments són dependents i per què:

Clica  per anar a la pàgina següent.

4.b. Diagrames d'arbre

Tal com has vist, en els experiments compostos es pot fer un diagrama en arbre, i cada resultat ve donat per un camí d'aquest arbre.

Per a calcular una probabilitat només cal dibuixar el camí corresponent, i el producte de les probabilitats de totes les branques que el formen serà el valor buscat.

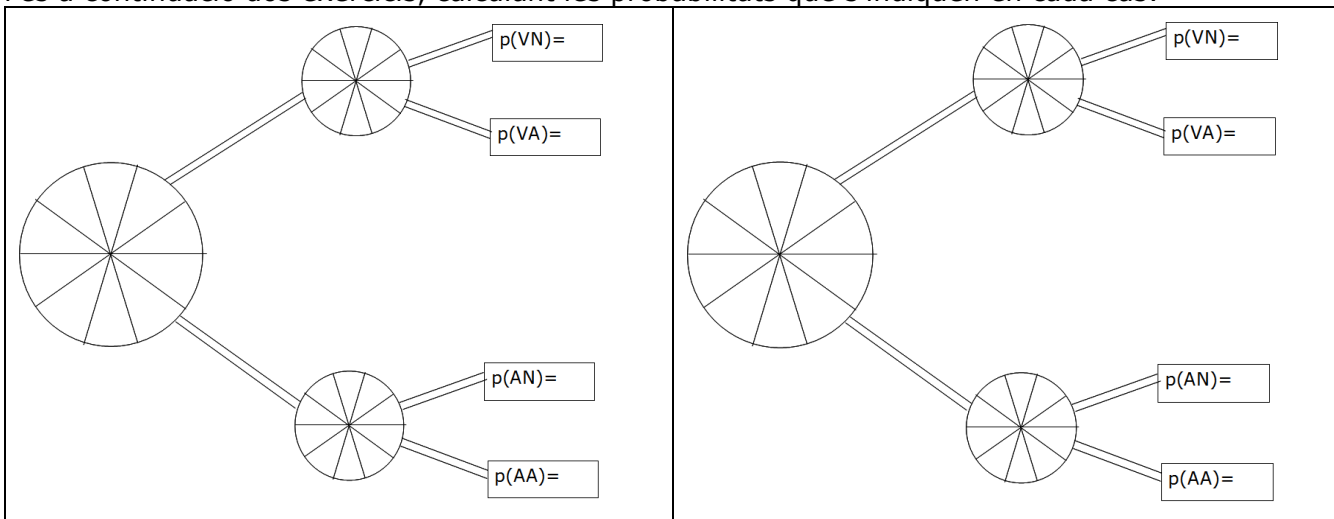
- Si ocorre A i després B: $P(A \text{ i } B) = \underline{\hspace{2cm}}$
- La suma de les probabilitats de tots els camins és igual a $\underline{\hspace{2cm}}$


En l'exemple de l'escena de la dreta pots comprovar aquest darrer resultat, juga i observa la suma total.

Clica el botó  per fer un exercici.

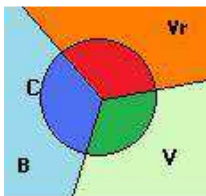
A l'esquerra tens una ruleta que determina quin camí triem entre dos, i una ruleta en cada camí per triar el color; cada cop que cliques **Ruletes noves**, tens un exercici diferent, i cada cop que cliques **Girar ruletes**, es realitza l'experiment i es calculen les freqüències absoluta i relativa.

Fes a continuació dos exercicis, calculant les probabilitats que s'indiquen en cada cas:



Clica  per anar a la pàgina següent.

4.c. Probabilitat total



Considerem els esdeveniments representats a la imatge. Vr=Vermell, V=Verd i B=Blau són tres esdeveniments incompatibles i tals que la unió forma tot l'espai mostral. Sigui C=Cercle un esdeveniment qualsevol.

Escriu la fórmula de la probabilitat total per aquest exemple:

p(C)=

En l'exemple de l'escena de la dreta pots practicar aquest resultat.

Clica el botó



per fer un exercici.

La probabilitat d'encertar el groc a la diana de la figura és $p(A) = \underline{\hspace{2cm}}$, el taronja $p(N) = \underline{\hspace{2cm}}$ i el verd $p(V) = \underline{\hspace{2cm}}$. Aquestes probabilitats sumen 1. Les probabilitats de llum o foscó són: <ul style="list-style-type: none"> • Si impacta en groc: $\underline{\hspace{2cm}}$ llum i $\underline{\hspace{2cm}}$ foscó. • Si impacta en taronja: $\underline{\hspace{2cm}}$ llum i $\underline{\hspace{2cm}}$ foscó. • Si impacta en verd: $\underline{\hspace{2cm}}$ llum i $\underline{\hspace{2cm}}$ foscó. Quina és la probabilitat d'encertar a llum?	$p(A) \cdot p(B/A) =$ $p(N) \cdot p(B/N) =$ $p(V) \cdot p(B/V) =$ $p(B) =$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------

Clica



per anar a la pàgina següent.

4.d. Probabilitat "a posteriori"

A vegades interessa conèixer la $p(A/E)$, és a dir, quan ja sabem que ha ocorregut E en la segona experiència, ens preguntem la probabilitat que s'hagi produït a través de A.

Es tracta d'una probabilitat condicionada coneguda com **Fórmula de Bayes**:

$$p(A/E) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Observa a l'exemple de l'escena com es desenvolupa aquesta fórmula i completa la taula següent de probabilitats:

	2a verda	2a negra	Total
1a verda	$p(VV) =$	$p(VN) =$	$p(1aV) =$
1a negra	$p(NV) =$	$p(NN) =$	$p(1aN) =$
Total	$p(2aV) =$	$p(2aN) =$	

A partir de la taula, calcula les següents probabilitats condicionades

$p(V/V) = \underline{\hspace{2cm}} =$

$p(V/N) = \underline{\hspace{2cm}} =$

$p(N/V) = \underline{\hspace{2cm}} =$

$p(N/V) = \underline{\hspace{2cm}} =$

Clica el botó



per fer un exercici.

La probabilitat d'encertar el groc a la diana de la figura és $p(A) = \underline{\hspace{2cm}}$, el taronja $p(N) = \underline{\hspace{2cm}}$ i el verd $p(V) = \underline{\hspace{2cm}}$. Aquestes probabilitats sumen 1. Les probabilitats de llum o foscó són: <ul style="list-style-type: none"> • Si impacta en groc: $\underline{\hspace{2cm}}$ llum i $\underline{\hspace{2cm}}$ foscó. • Si impacta en taronja: $\underline{\hspace{2cm}}$ llum i $\underline{\hspace{2cm}}$ foscó. • Si impacta en verd: $\underline{\hspace{2cm}}$ llum i $\underline{\hspace{2cm}}$ foscó. Si es va encertar en llum, quina és la probabilitat que fos sobre groc?	$p(A) \cdot p(B/A) =$ $p(N) \cdot p(B/N) =$ $p(V) \cdot p(B/V) =$ $p(B) =$ $p(A/B) =$
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------

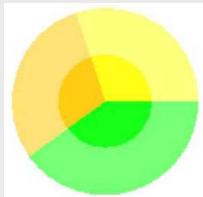
Clica



per anar a la pàgina següent.

EXERCICIS

10. Llancem un dau de 4 cares $\{1,2,3,4\}$ i un altre de 10 $\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4\}$. Quina és la probabilitat d'obtenir dos tresos. I dos quatres?
11. En una bossa tenim 5 boles numerades del 1 al 5. Extraiem dues boles,
 - a) quina és la probabilitat d'obtenir un 2 i un 3 si no retornem les boles tretes?
 - b) i quina si les retornem?
12. En tirar dos daus, quina és la probabilitat d'obtenir al menys 10 punts?
13. Tirem una moneda trucada en la que $P(C)=0,6$ i $P(X)=0,4$. Si surt cara tirem un dau $\{1,2,3,4\}$ de 4 cares i si surt creu, un $\{1,2,3,4,5,6\}$ de sis. Tenim la mateixa probabilitat que surti 1 després que surti cara o creu? Quant val en cada cas? Quina és la probabilitat que surti 1?
14. Tenim un dau $\{1,1,1,1,2,2,2,2,2,2\}$ de 10 cares. Si traiem un 1 tirem una moneda, i dues si traiem un 2. Quina és la probabilitat d'obtenir una cara?
15. Tenim un dau $\{1,1,1,1,2,2,2,2,2,2\}$ de 10 cares. Tirem el dau, si surt 1, traiem una bola de $\{RRNNN\}$ i si surt un 2, en traiem una de $\{RRRRN\}$. Ha sortit N, quina és la probabilitat que fos amb un 1 del dau?
16. La probabilitat d'encertar el groc a la diana de la figura és 0,3, el verd 0,4 i el taronja 0,3. A més, si s'encerta el groc, la probabilitat que sigui en llum, és 0,7; la probabilitat de llum en verd és 0,6 i en taronja 0,3.



- a) Quina és la probabilitat d'encertar en la zona de llum?
- b) Si s'ha encertat en la zona de llum, quina és la probabilitat que fos en groc?



Recorda el més important – RESUM

Experiments aleatoris

Un experiment aleatori és aquell en el qual _____
el resultat per molt que l'hàgim experimentat.

Si llancem un dau:

Espai **mostral** _____ Esdeveniment **segur**: _____

Esdeveniments **elementals**: _____ Esdeveniment **impossible**: _____

Un esdeveniment A: _____ Esdeveniment **contrari** a un esdeveniment A: _____

Dos esdeveniments són **compatibles** si _____ Dos esdeveniments són **incompatibles** si _____

Operacions amb esdeveniments

Unió $A \cup B$: es verifica quan _____ **Intersecció $A \cap B$** : es verifica quan _____ **Diferència $A - B$** : es verifica quan _____

Regla de Laplace

Es pot aplicar només quan els esdeveniments elementals són _____ $p = \frac{\text{Nre. casos}}{\text{Nre. casos}}$

Propietats de la probabilitat

$p(\text{E. segur}) = P(E) = \underline{\hspace{2cm}}$ $p(\text{E. impossible}) = P(\emptyset) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\underline{\hspace{2cm}} \leq P(\text{esdeveniment}) \leq \underline{\hspace{2cm}}$ $p(\bar{A}) = 1 - p(\underline{\hspace{2cm}})$	A i B són incompatibles $p(A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$	A i B compatibles $p(A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------

Experiments compostos

Estan formats per _____
Per a calcular la probabilitat _____

Probabilitat condicionada

En esdeveniments consecutius poden produir-se dues situacions:

Independents

Dependents

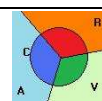
Fórmula de Bayes

$$p(B/A) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Probabilitat total

Si es compleix que $P(A) + P(V) + P(R) = 1$, aleshores es compleix que

P(C) = _____



Clica per anar a la pàgina següent.



Per practicar

Ara practicaràs resolent diferents EXERCICIS. En les següents pàgines trobaràs EXERCICIS de:
Aplicació de la regla de Laplace i propietats de la probabilitat
Probabilitat condicionada, probabilitat total i Bayes

Completa l'enunciat amb les dades de cada EXERCICI en la pantalla i després resol-lo.
 És important que primer el resolguis tu i després comprovis a l'ordinador si ho has fet bé.

Aplicació de la regla de Laplace i propietats de la probabilitat

1 daus

1. Llancem un dau de 10 cares, quina probabilitat hi ha de treure un nombre parell?

--	--

2 daus

2. Llancem dos daus de 6 cares. Quina probabilitat hi ha de treure més de 9 punts?

--	--

3 daus

3. En llançar dos daus, quina probabilitat hi ha de treure igual?

--	--

4 cartes (Fes al menys dos exercicis sense canviar d'opció)

4. Si extraiem una carta d'una baralla espanyola, la probabilitat d'extreure un ____ és?

--	--

5. Si extraiem una carta d'una baralla espanyola, la probabilitat d'extreure un ____ és?

--	--

5 cartes

6. Si extraiem una carta d'una baralla espanyola, la probabilitat d'extreure un 2 o un 5 és?


--	--

6 cartes (Fes al menys dos exercicis sense canviar d'opció)

<p>7. Si extraiem una carta d'una baralla espanyola, la probabilitat de no treure ni un ____ ni un basto és?</p>	
<p>8. Si extraiem una carta d'una baralla espanyola, la probabilitat de no treure ni un ____ ni un basto és?</p>	

7 monedes

<p>9. Si llancem 3 monedes, la probabilitat d'obtenir una cara és?</p>	
------------------------------------------------------------------------	--

 Clica  per anar a la pàgina següent.

Probabilitat condicionada, probabilitat total i Bayes
Dos encreuaments de camins (Fes al menys dos exercicis sense canviar d'opció)

<p>10. Tenim dos camins I i II amb $p(I)=$____ i $p(II)=$____. El camí I pot acabar en turquesa o en rosa amb probabilitats ____ i ____ respectivament. El camí II porta directament a verd. Calcula les probabilitats de les tres destinacions.</p>	
<p>11. Tenim dos camins I i II amb $p(I)=$____ i $p(II)=$____. El camí I pot acabar en turquesa o en rosa amb probabilitats ____ i ____ respectivament. El camí II porta directament a verd. Calcula les probabilitats de les tres destinacions.</p>	

Tres encreuaments de camins (Fes al menys dos exercicis sense canviar d'opció)

12. Tenim dos camins I i II amb $p(I)=$ ___ i $p(II)=$ ___. El camí I pot acabar en turquesa o en rosa amb probabilitats ___ i ___ respectivament. El camí II en rosa o en verd amb probabilitats ___ i ___ respectivament. Calcula les probabilitats de les tres destinacions.

13. Tenim dos camins I i II amb $p(I)=$ ___ i $p(II)=$ ___. El camí I pot acabar en turquesa o en rosa amb probabilitats ___ i ___ respectivament. El camí II en rosa o en verd amb probabilitats ___ i ___ respectivament. Calcula les probabilitats de les tres destinacions.

Camins i Bayes (Fes al menys dos exercicis sense canviar d'opció)

14. Dos camins I i II amb $p(I)=$ ___ i $p(II)=$ ___. El primer pot acabar en turquesa o rosa amb probabilitats ___ i ___ respectivament. El segon camí pot acabar en rosa o verd amb probabilitats ___ i ___ respectivament. Si s'ha acabat en rosa, quina és la probabilitat d'haver seguit el primer?

15. Dos camins I i II amb $p(I)=$ ___ i $p(II)=$ ___. El primer pot acabar en turquesa o rosa amb probabilitats ___ i ___ respectivament. El segon camí pot acabar en rosa o verd amb probabilitats ___ i ___ respectivament. Si s'ha acabat en rosa, quina és la probabilitat d'haver seguit el primer?

Platja sud (Fes al menys dos exercicis sense canviar d'opció)

16. Amb una probabilitat de _____ un habitant d'un poble A va a la platja, i amb _____ va al camp. I amb una probabilitat ___ va al nord i amb la contrària, al sud. Quina és la probabilitat d'anar a una platja del sud?

17. Amb una probabilitat de _____ un habitant d'un poble A va a la platja, i amb _____ va al camp. I amb una probabilitat ____ va al nord i amb la contrària, al sud. Quina és la probabilitat d'anar a una platja del sud?

Camp nord (Fes al menys dos exercicis sense canviar d'opció)


18. Amb una probabilitat de _____ un habitant d'un poble A va a la platja, i amb _____ va al camp. I amb una probabilitat ____ va al nord i amb la contrària, al sud. Quina és la probabilitat d'anar al camp del nord?

19. Amb una probabilitat de _____ un habitant d'un poble A va a la platja, i amb _____ va al camp. I amb una probabilitat ____ va al nord i amb la contrària, al sud. Quina és la probabilitat d'anar al camp del nord?

Camp platja i Bayes (Fes al menys dos exercicis sense canviar d'opció)

20. Amb una probabilitat de _____ un habitant d'un poble A va a la platja, i amb _____ va al camp. I amb una probabilitat ____ va al nord i amb la contrària, al sud. Sabem que en Felip ha anat a la platja, quina és la probabilitat que a més sigui del nord?

21. Amb una probabilitat de _____ un habitant d'un poble A va a la platja, i amb _____ va al camp. I amb una probabilitat ____ va al nord i amb la contrària, al sud. Sabem que en Felip ha anat a la platja, quina és la probabilitat que a més sigui del nord?

Clica  per anar a la pàgina següent.

Autoavaluació



Completa aquí cada un dels enunciats que van apareixent a l'ordinador i resol-lo, després introdueix el resultat per comprovar si la solució és correcta.

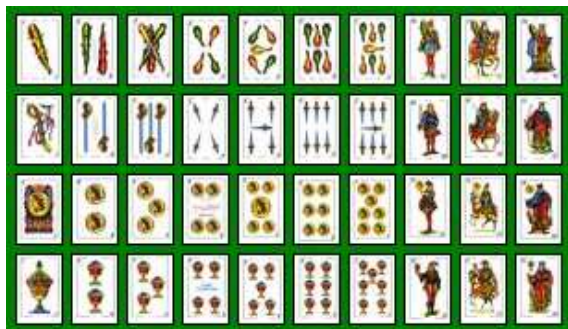
<p>1 Tirem un dau de 10 cares. $P(\text{obtenir } < \text{____}) =$</p>	
<p>2 En una bossa tenim _____ boles vermelles, ____ boles blaves i ____ boles verdes. Extraiem una bola, quina és la probabilitat d'obtenir una bola vermella?</p>	
<p>3 Disposem d'una baralla de 100 cartes de quatre colors numerades de 1 al 25. Quina és la probabilitat d'obtenir un _____?</p>	
<p>4 Esdeveniments elementals = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 48, 49, 50\}$ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ i $C = \{1, 2, 3, 4, \dots, 23, 24, 25\}$. Calcula $p(A \cup C) =$</p>	
<p>5 Llancem dos daus normals i sumem. Quina probabilitat hi ha d'obtenir menys de 5?</p>	
<p>6 Quina probabilitat hi ha de no treure ni bastos ni figures en extreure una carta d'una baralla espanyola?</p>	
<p>7 Extraiem una carta, la retornem i n'extraiem una altra, d'una baralla espanyola. Quina probabilitat hi ha de treure un oro?</p>	
<p>8 Tirem dues monedes. Si surten dues cares extraiem una bola d'una urna amb ____ B i ____ N, i, en cas contrari, d'una urna amb ____ B i ____ N, quina és la probabilitat de treure una B?</p>	
<p>9 Tirem un dau de 10 cares. Si surt més petit que _____, extraiem una carta, i en cas contrari, dues, retornant la primera abans de treure la segona. Quina probabilitat hi ha d'obtenir almenys un oro?</p>	
<p>10 En un col·legi el _____% de l'alumnat practica futbol, el ____% bàsquet i el _____% un o l'altre. Quina probabilitat hi ha que un estudiant practiqui els dos esports?</p>	



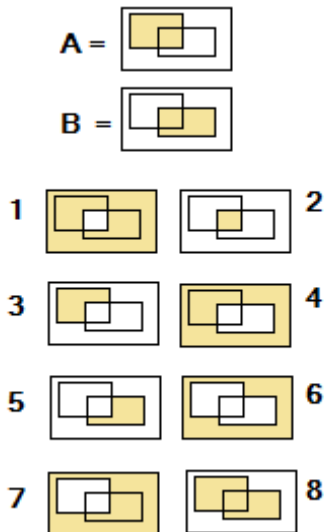
Per practicar més

- Hi ha al mercat diversos tipus de daus, tot i que el més normal sigui el cúbic de sis cares. N'hi ha de 4, 6, 10, 12, i 20 cares. En general, van numerades del 1 al nombre de cares que tenen. Escriu l'esdeveniment "parell" per a cadascun.
- Tenim un dau de 4 cares numerades del 1 al 4. El tirem una vegada. Escriu l'esdeveniment segur, l'impossible, i tots els possibles classificats per la seva mida.
- Tenim un dau de 6 cares blanc, en el qual s'han escrit a les cares els següents nombres {1,1,1,2,2,3}. Escriu tots els esdeveniments possibles.
- A l'escola municipal d'un poble hi ha classes d'esports d'equip de bàsquet, futbol i voleibol. N'hi ha 100 d'inscrits en esports d'equip, 70 van a classes de futbol, 60 de bàsquet i 40 a futbol i bàsquet. Quants van només a voleibol?
- Determina el nombre de cartes, en una baralla espanyola de 40:
 - Amb numeració inferior a 4.
 - De bastos i més gran que 4.
 - Figures d'oros o bastos.
- En una baralla espanyola, compta les cartes dels esdeveniments :

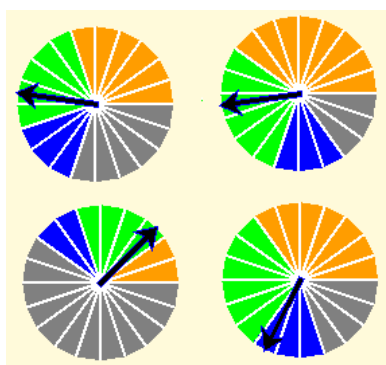
a) Oros i sets	b) Oros o sets
c) Set d'oros	d) Figures
e) Oros o figures	f) Oros i figures
- Per a un dau de sis cares {1,2,3,4,5,6}, escriu els esdeveniments:
 - Parell
 - No parell
 - Parell i més gran que 3
 - Parell o més gran que 3
 - Parell menys més gran que 3
 - El contrari de (parell i més gran que 3)
- Tenim un dau amb els nombres {1,1,1,2}. Si el tirem 100 vegades, quina quantitat de vegades sortirà cada un dels possibles resultats?
- Tenim un dau de deu cares numerades com {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4}. Quina és la probabilitat de cada un dels esdeveniments elementals?
- Tenim una ruleta de 10 posicions, 3 vermelles, 4 verdes, 2 negres i una blava. Quina és la probabilitat que en girar-la s'obtingui cada un dels colors?
- Si llancem dues monedes podem obtenir un d'aquests 4 resultats {OO, XO, OX, XX}. Pots escriure d'aquesta manera els resultats possibles per a tres monedes? I per a 4? Quina és la probabilitat d'obtenir dues cares en cada un dels experiments?



12. Si sabem que $P(A)=0.5$, $p(B)=0.7$ i $P(2)=0.3$, calcula $P(1)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$ i $P(8)$:



13. Quina és la probabilitat d'obtenir taronja, verd, blau o gris en cada una de les següents ruletes?



14. Tenim un dau de 10 cares d'aquesta forma $\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2\}$. I dues urnes, una $A=\{R, R, R, V, V\}$ i $B=\{R, V, V, V, V\}$. Tirem el dau, si surt 1, extraiem una bola de A, i si surt 2, de B. Quina és la probabilitat d'extreure'n una de vermella de A? I una vermella de B? I una verda de A?
15. En una bossa hi ha les boles següents $\{1,2,2,3,3\}$. Extraiem primer una bola, la tornem i n'extraiem una altra. Calcula les probabilitats següents: $P(1,1)$, $P(1,2)$, $P(1,3)$.

16. Si abans de la segona extracció de l'exercici anterior no tornem la primera bola, quin és el valor de les probabilitats ara?

17. Calcula les probabilitats d'obtenir 2 oros en extreure dues cartes d'una baralla espanyola en els casos de tornar i de no tornar la primera carta a la baralla abans de extreure la segona.

18. Tenim un dau de 10 cares de la forma $\{1,1,1,1,2,2,2,2,2,2\}$, i dues urnes, una $A=\{R,R,R,V,V\}$ i l'altra $B=\{R,V,V,V,V\}$. Llancem el dau, si surt 1 extraiem una bola de A, i si surt 2 de B. Quina és la probabilitat d'extreure una R? I una V?

19. Tenim una urna amb boles numerades com s'indica $\{1,1,2,2,2\}$ i dues urnes $I=\{R,V\}$ i $II=\{N,N,R,V\}$. Extraiem una bola per decidir de quina urna n'escollim una altra. Quina és la probabilitat d'obtenir R o N?

20. Un cop fet l'experiment de l'exercici anterior, ha resultat ser V. Quina és la probabilitat que hagués estat extreta de la urna A? I de la B?

21. Es tiren dues monedes. Si surten dues cares es tira el dau $\{1,1,1,2,2,2\}$ i si no, el dau $\{1,1,2,2,3,3\}$. Quina és la probabilitat d'obtenir un 1? Quan surt 1, amb quina probabilitat ha sortit també dues cares?

22. Deu amics organitzen un viatge i tria la destinació un d'ells per sorteig. Sis volen anar a la costa i quatre a l'interior. Dels primers, dos volen anar al nord i quatre al sud. Dels d'interior, la meitat prefereixen el nord i l'altra meitat, el sud.

- a) Troba la probabilitat d'anar a la costa del nord.
- b) Quina és la probabilitat d'anar al nord?
- c) Si van al nord, quina és la probabilitat que sigui a la costa?