

## Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Conocer e interpretar las funciones y las distintas formas de presentarlas.
- Reconocer el dominio y el recorrido de una función.
- Determinar si una función es continua o discontinua.
- Hallar la tasa de variación media de una función en un intervalo.
- Determinar el crecimiento o decrecimiento de una función y hallar sus máximos y mínimos.
- Investigar el comportamiento a largo plazo de una función.
- Comprobar la simetría de algunas funciones respecto al origen y al eje OY.
- Reconocer si una función es periódica.

Antes de empezar.

1.Funciones .....	pág. 162
Concepto	
Tablas y gráficas	
Dominio y recorrido	
2.Propiedades .....	pág. 166
Continuidad	
Simetrías	
Periodicidad	
Tendencia	
3.Monotonía .....	pág. 170
Tasa de variación media	
Crecimiento y decrecimiento	
Máximos y mínimos	

Ejercicios para practicar

Para saber más

Resumen

Autoevaluación



### El lenguaje de las gráficas



De las distintas formas en que puede presentarse una función, mediante un enunciado, una tabla, una expresión algebraica o una gráfica, esta última es la que nos permite ver de un sólo vistazo su comportamiento global, de ahí su importancia. En este tema aprenderás a reconocer e interpretar sus características principales.



### Investiga

Imagina que montas en una noria cuyo radio mide 30 m y para subir hay que ascender 5 m desde el suelo.

La noria comienza a girar, ¿cómo es la gráfica de la función que da la altura a la que te encuentras según el ángulo de giro?

Tú vas en la cabina naranja y unos amigos en la verde, ¿cómo será su gráfica?

# Funciones y gráficas

## 1. Funciones

### Concepto de función

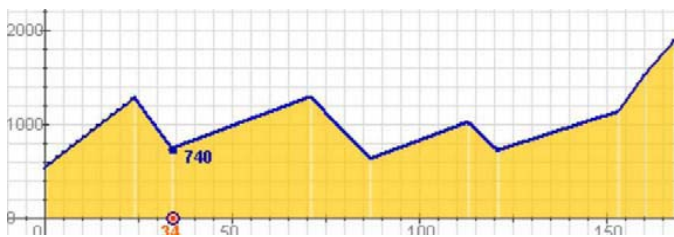
Una función es una **correspondencia** entre dos conjuntos numéricos, de tal forma que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde **un elemento y sólo uno** del conjunto final, la imagen.

Se relacionan así dos variables numéricas que suelen llamarse **x** e **y**,

$$f: x \rightarrow y=f(x)$$

**x** es la variable **independiente**

**y** es la variable **dependiente**



km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882

### Gráfica de una función

Para ver el comportamiento de una función, **f: x → y**, recurrimos a su **representación gráfica** sobre los ejes cartesianos, en el eje de abscisas (OX) la variable independiente y en el de ordenadas (OY) la dependiente; siendo las coordenadas de cada punto de la gráfica: **(x, f(x))**.

En la figura está representada la función:

$$f(x) = 0,5x^2 + 3x + 3,5$$

Haciendo una tabla de valores, se representan los puntos obtenidos, x en el eje de abscisas (OX), f(x) en el de ordenadas (OY).

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>f(x)</b>	-4,5	0	3,5	6	7,5	8	7,5	6	3,5	0	-4,5

Hay unos puntos que tienen especial interés, los que la gráfica corta a los ejes coordenados.

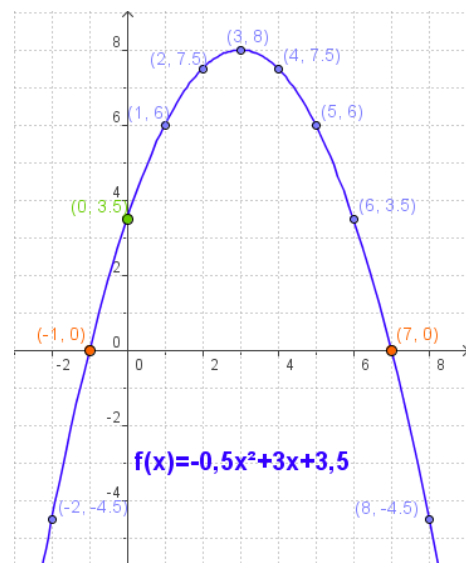
Para calcularlos:

- Corte con el eje OY:  
Los puntos del eje de ordenadas tienen abscisa 0, basta hacer **x=0** en la fórmula de la función.
- Cortes con el eje OX:  
Los puntos del eje de abscisas tienen y=0. Se resuelve la ecuación **f(x)=0**.



El gráfico describe el recorrido de la 9ª Etapa de la Vuelta Ciclista 2007, indicando los km totales y la altitud en los puntos principales del trayecto.

A la izquierda aparece la gráfica anterior trazada sobre unos ejes cartesianos, para simplificarla se han unido los puntos principales mediante segmentos. Se trata de una función que da la altitud según los km recorridos, observa la tabla de valores.



#### Cortes con los ejes

**EJE OY:**  $f(0)=3,5$  Punto  $(0, 3,5)$

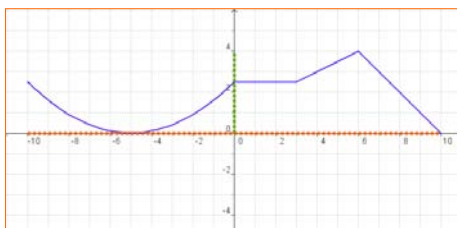
**EJE OX:** Resolviendo la ecuación:  
 $0,5x^2 + 3x + 3,5 = 0$

Resulta:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+7}}{-2 \cdot 0,5} = 3 \pm 4 = \begin{matrix} 7 \\ -1 \end{matrix}$$

Puntos  $(7, 0)$   $(-1, 0)$

## Dominio y recorrido



**Dom  $f = [-10, 10]$**

Dada una función  $y=f(x)$

- Se llama **dominio** de  $f$  al conjunto de valores que toma la variable independiente,  $x$ . Se indica como **Dom  $f$** . El dominio está formado, por tanto, por los valores de  $x$  para los que existe la función, es decir, para los que hay un  $f(x)$ .
- El **recorrido** es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente,  $y$ , esto es el conjunto de las imágenes. Se representa como **Im  $f$** .

### Calcular Dominios

- Si la expresión analítica de la función es un polinomio, el dominio son todos los números reales.

$$f(x) = -x^4 + 4x^2 + 1$$

**Dom  $f = \mathbb{R}$**

**Im  $f = (-\infty, 5]$**

- Si la expresión analítica de la función es un cociente, el dominio son todos los reales excepto los que anulan el denominador.

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

**Dom  $f = \mathbb{R} - \{1\}$**

**Im  $f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$**

- Si la expresión analítica de la función es una raíz cuadrada, el dominio está formado por los números reales para los que el radicando es positivo o cero.

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

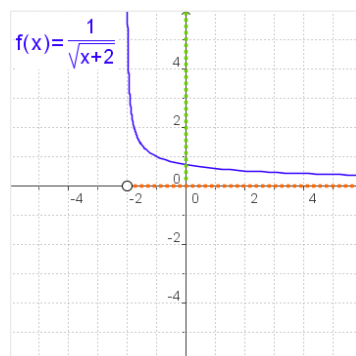
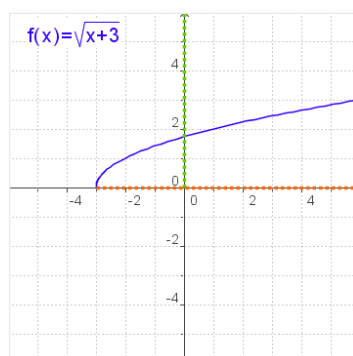
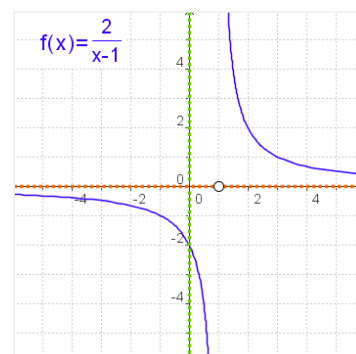
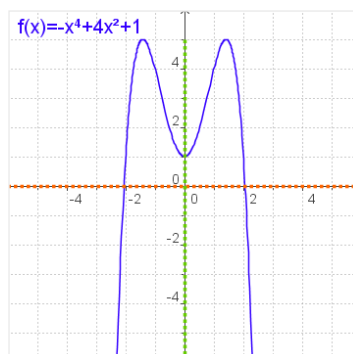
**Dom  $f = [-3, +\infty)$**

**Im  $f = [0, +\infty)$**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

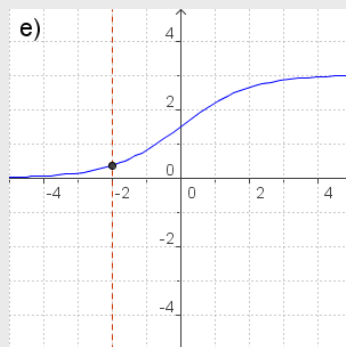
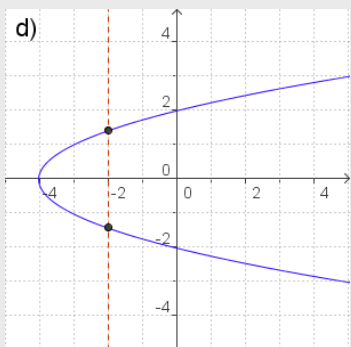
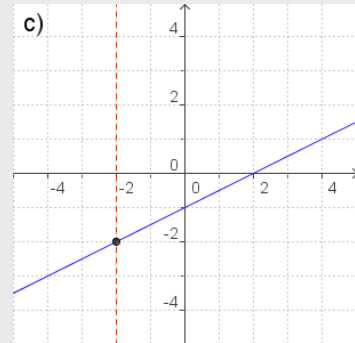
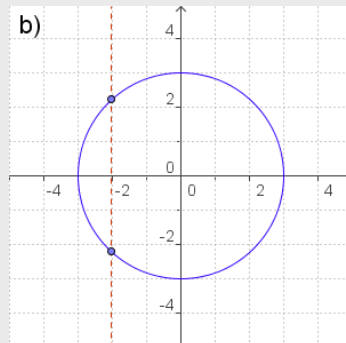
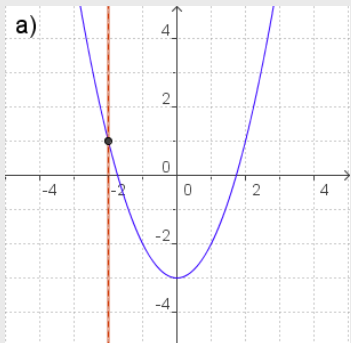
**Dom  $f = (-2, +\infty)$**

**Im  $f = (0, +\infty)$**



## EJERCICIOS resueltos

1. De las siguientes gráficas indica las que corresponden a una función y las que no.

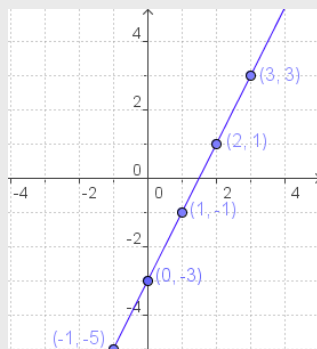


- Son gráficas de una función a), c) y e), ya que a cada  $x$  del dominio le corresponde un único valor de  $y$ .
- No son gráficas de una función b) y d)

2. Haz una tabla de valores, dibuja los puntos obtenidos y representa la función.

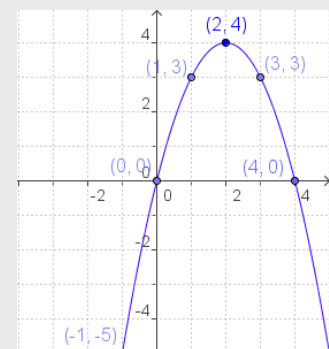
a)  $f(x) = 2x - 3$

x	f(x)
0	-3
1	-1
2	1
3	3
-1	-5
-2	-7



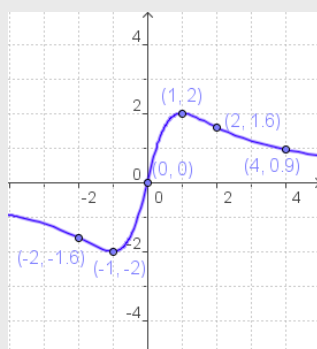
b)  $f(x) = -x^2 + 4x$

x	f(x)
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0
-1	-5



c)  $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

x	f(x)
0	0
1	2
-1	-2
2	1,67
-2	-1,67
4	0,9



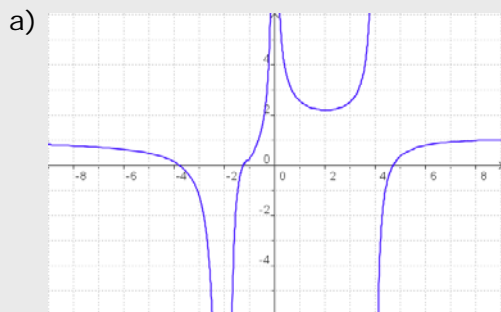
• **RECUERDA**

Para hacer una tabla de valores, a partir de la expresión de una función, sustituye en la fórmula la  $x$  por los valores que desees, opera y calcula los correspondientes de  $y=f(x)$ . En general procura alternar valores positivos y negativos.

Dibuja los puntos  $(x,y)$  así obtenidos, y únelos.

## EJERCICIOS resueltos

3. Calcula el dominio de las siguientes funciones.



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 0, 4\}$$

En estos puntos, no se puede encontrar  $f(x)$  en la gráfica.



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1, 5\}$$

En los puntos indicados, no se puede encontrar  $f(x)$  en la gráfica.

c)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$

Dom  $f = \mathbb{R}$  ya que es un polinomio

d)  $f(x) = \frac{x}{x-2}$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$$

No se puede calcular  $f(2)$  porque el denominador se hace 0.

e)  $f(x) = \sqrt{x-5}$

$$x-5 \geq 0, \quad x \geq 5 \Rightarrow \text{Dom } f = [5, +\infty)$$

f)  $f(x) = \sqrt{5-x}$

$$5-x \geq 0, \quad 5 \geq x \Rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 5]$$

g)  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+4}}$

$$x+4 > 0, \quad x > -4 \Rightarrow \text{Dom } f = (-4, +\infty)$$

-4 no es del Dominio porque anula el denominador.

h)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

$$2-x > 0, \quad 2 > x \Rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 2)$$

2 no es del Dominio porque anula el denominador.



# Funciones y gráficas

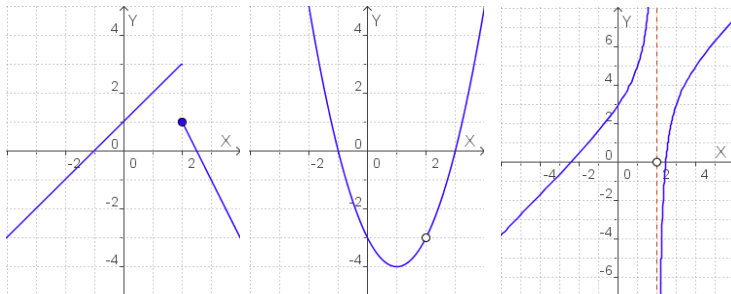
## 2. Propiedades de las funciones

### Continuidad

La primera idea de función **continua** es la que puede ser representada de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel.

Cuando una función no es continua en un punto se dice que presenta una **discontinuidad**.

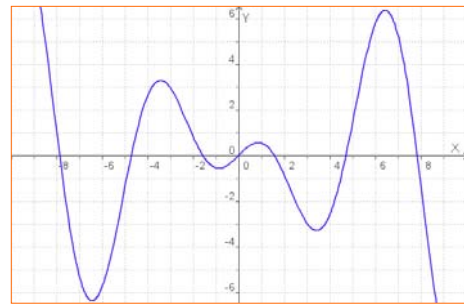
Las tres funciones dibujadas debajo son discontinuas en  $x=2$ , pero tienen distintos tipos de discontinuidad.



Salto finito

Discontinuidad evitable

Salto infinito



Una función  $y=f(x)$  es continua en  $x=a$  si:

- La función está definida en  $x=a$ , existe  $f(a)=b$ .
- Las imágenes de los valores próximos a  $a$  tienden a  $b$ .

Hay varias razones por las que una función puede no ser continua en un punto:

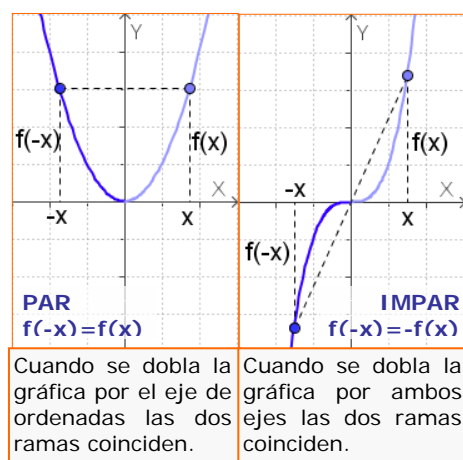
- Presenta un salto.
- La función no está definida en ese punto, o si lo está queda separado, hay un "agujero" en la gráfica.
- La función no está definida y su valor crece (o decrece) de forma indefinida cuando nos acercamos al punto.

### Simetrías

La gráfica de algunas funciones puede presentar algún tipo de simetría que si se estudia previamente, facilita su dibujo.

- Una función es **simétrica** respecto al **eje OY**, si  $f(-x)=f(x)$ . En este caso la función se dice **PAR**.
- Una función es **simétrica** respecto al **origen de coordenadas** cuando  $f(-x)=-f(x)$ . En este caso la función se dice **IMPAR**.

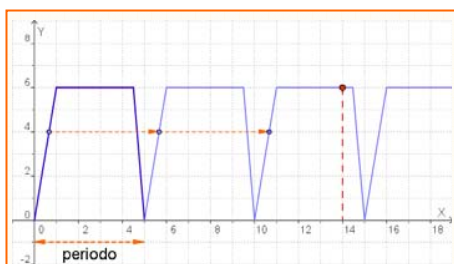
Observa los gráficos para reconocerlas.



Cuando se dobla la gráfica por el eje de ordenadas las dos ramas coinciden.

Cuando se dobla la gráfica por ambos ejes las dos ramas coinciden.





Una cisterna se llena y vacía automáticamente expulsando 6 litros de agua cada 5 minutos, siguiendo el ritmo de la gráfica. Cuando el depósito está vacío comienza el llenado, que cuesta 1 minuto, permanece lleno 3,5 minutos y se vacía en 0,5 minutos. Este proceso se repite periódicamente.

Para conocer el volumen de agua en el depósito en cada instante basta conocer lo que ocurre en estos primeros 5 minutos.

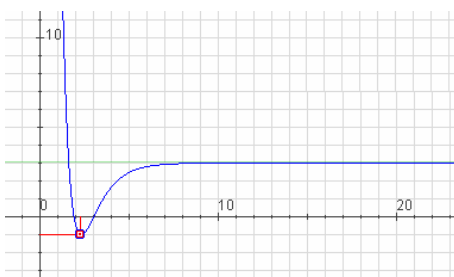
Así a los 14 minutos, la cantidad de agua es:

$$f(14) = f(4 + 2 \cdot 5) = f(4) = 6$$

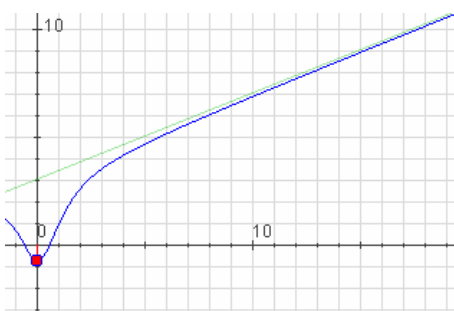
Al dividir  $14:5$ , cociente=2 resto=5

En general, si el periodo es 5:

$$f(x + 5 \cdot n) = f(x)$$



Función con asíntota horizontal



Función con tendencia lineal

## Funciones periódicas

En la naturaleza y en tu entorno habitual hay fenómenos que se repiten a intervalos regulares, como el caso de las mareas, los péndulos y resortes, el sonido...

Las funciones que describen este tipo de fenómenos se dicen **periódicas**

Una función es **periódica** cuando su valor se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. El valor de este intervalo se llama **periodo**.

$$f(x + \text{periodo}) = f(x)$$

## Tendencia de una función

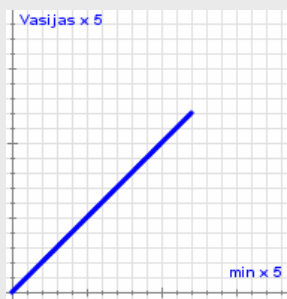
En ocasiones la parte que nos interesa de una función es su **comportamiento a largo plazo**, es decir, los valores que toma la función cuando la  $x$  se hace cada vez más grande. Cuando ese comportamiento es claramente definido decimos que la función tiene una determinada **tendencia**.

En el apartado anterior hemos visto que algunas funciones presentan un comportamiento periódico: repiten sus valores a intervalos regulares. Aquí vamos a ver otros tipos de tendencias.

1. Una función tiene una **asíntota horizontal** si a medida que la variable independiente va tomando valores más y más grandes, la variable dependiente se va estabilizando entorno a un valor concreto,  $k$ . La asíntota es una línea recta de ecuación  $y=k$ .
2. Una función tiene **tendencia lineal** si a medida que la variable independiente va tomando valores más y más grandes su gráfica se parece cada vez más a la de una línea recta, a la que llamaremos **asíntota oblicua**.
3. Una función tiene **tendencia cuadrática** si a medida que la variable independiente va tomando valores más y más grandes, su gráfica se parece cada vez más a una curva que estudiaremos en el próximo capítulo que se denomina **parábola** y cuya ecuación viene dada por un polinomio de segundo grado.

## EJERCICIOS resueltos

4. La imagen adjunta representa el reloj de agua del Museo de los Niños en Indianápolis (Estados Unidos). Su funcionamiento es como sigue: en la columna de la derecha hay 60 vasijas que se van llenando de agua poco a poco. Cuando se llena la que hace el piso 60 se vacía de golpe toda la columna y se llena una de las bolas de la columna de la izquierda que tiene 12 bolas. Como puedes suponer la columna de la izquierda indica las horas y la columna de la derecha los minutos. Indica si la función que relaciona la altura del agua en la columna de la derecha con el tiempo transcurrido es continua y haz un esbozo de su gráfica.



A lo largo de una hora la columna de la derecha se llena de forma casi constante, por lo que **su gráfica es continua** y tiene el aspecto que se indica al lado.

Si llamamos  $x$  al tiempo en minutos y llamamos  $y$  al número de vasijas (lo que equivale a la altura), la expresión algebraica de esta función es  $y = x$ .

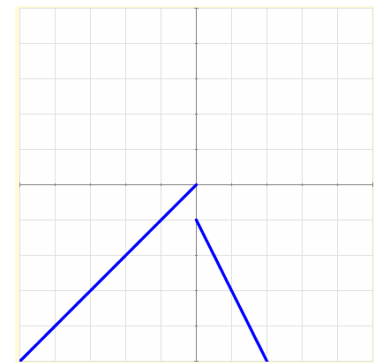


5. Indica si la función que relaciona la altura del agua en la columna de la izquierda con el tiempo transcurrido es continua y haz un esbozo de su gráfica.

Cuando cae el agua de la columna derecha se llena una bola de la columna izquierda de forma casi instantánea, y durante una hora la altura de la columna izquierda no cambia. Estas variaciones súbitas de la altura nos indican **que la función no es continua**.



Si llamamos  $x$  a las horas transcurridas e  $y$  al número de vasijas de la izquierda llenas la expresión algebraica de esta función es  $y = \text{ent}(x)$  (La parte entera de  $x$ )



6. Indica si las gráficas adjuntas son continuas o discontinuas.

La primera es discontinua porque para dibujarla hay que levantar el lápiz del papel, en cambio, la segunda es continua.

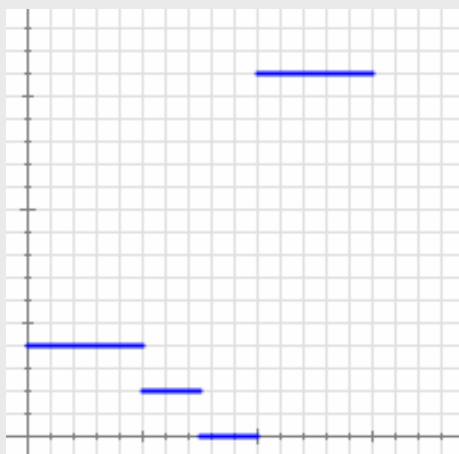


## EJERCICIOS resueltos

7. Juan tiene hoy una excursión en el colegio. Como vive lejos suele ir en bicicleta. Nada más llegar al colegio salen todos los alumnos andando hacia la estación de trenes y allí esperan un rato a que llegue el tren. Suben al tren y por fin llegan a su destino.

Abajo puedes ver dos gráficas: una representa la distancia que va recorriendo Juan con respecto al tiempo transcurrido y la otra representa la velocidad a la que se desplaza, también con respecto al tiempo transcurrido.

Indica de forma razonada qué gráfica corresponde a cada una de las dos situaciones e indica en cada caso si la función representada es continua o no.



La primera gráfica representa las velocidades:

Al principio va en bicicleta pero siempre a la misma velocidad (por eso la gráfica es horizontal). En cuanto llega al colegio empieza a andar (sigue siendo horizontal, pero está más baja, lo que significa que andando va más despacio que en bicicleta). Llega a la estación y se queda parado un rato (la velocidad es cero). Sube al tren (la velocidad es constante pero la gráfica más alta indica que van mucho más deprisa).

La gráfica es **discontinua** y los saltos se producen al cambiar el método de locomoción.

La segunda gráfica representa las distancias a su casa.

Al principio la distancia va aumentando de manera constante (viaje en bici), luego sigue aumentando pero la gráfica está menos inclinada (eso significa que la velocidad es menor: va andando). Durante un rato, la distancia no aumenta (la gráfica es horizontal, está parado). Por último vuelve a aumentar muy deprisa (la mayor inclinación indica mayor velocidad: viaje en tren).

En este caso no hay saltos en la gráfica (por lo tanto es **continua**), pero sí hay cambios bruscos de velocidad que quedan reflejados en los cambios de inclinación de la gráfica.

## 3. Monotonía

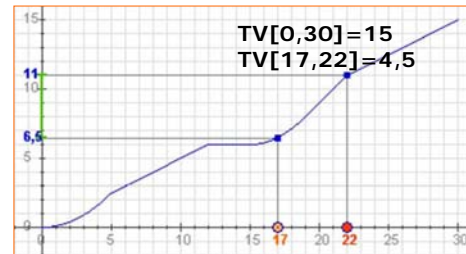
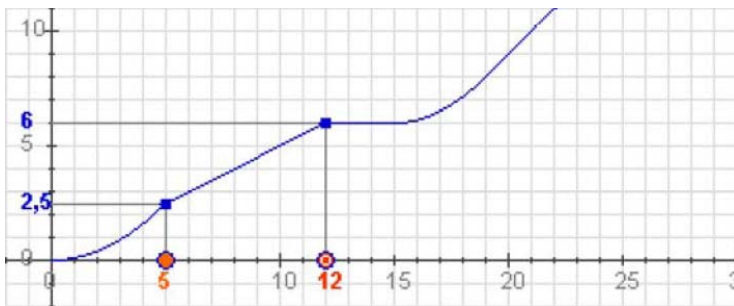
### Tasa de variación de una función

La **tasa de variación** o **incremento** de una función es el aumento o disminución que experimenta una función al pasar la variable independiente de un valor a otro.

$$TV[x_1, x_2] = f(x_2) - f(x_1)$$

De más utilidad resulta calcular la llamada **tasa de variación media**, que nos indica la variación relativa de la función respecto a la variable independiente:

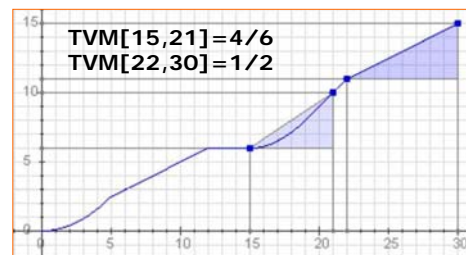
$$TVM[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



La gráfica representa la distancia en km recorrida de un ciclista en función del tiempo, en minutos, empleado.

La TV corresponde a la distancia recorrida en un intervalo de tiempo.

La TVM es la velocidad media en un intervalo de tiempo determinado.



### Crecimiento y decrecimiento

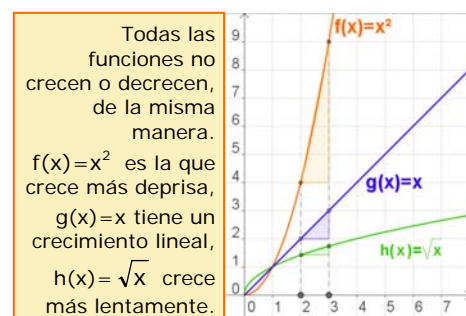
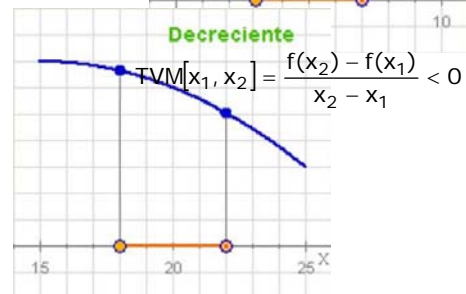
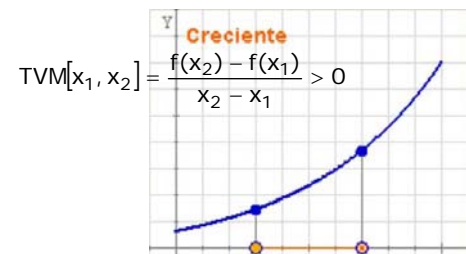
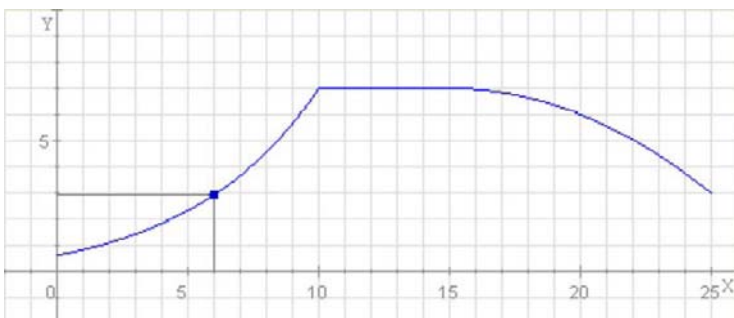
Una característica de las funciones que se puede visualizar fácilmente en las gráficas es la monotonía. Cuando al aumentar el valor de  $x$  aumenta el valor de  $y=f(x)$ , la gráfica "asciende" y se dice que la función es **creciente**. Si por el contrario al aumentar  $x$  disminuye  $y$ , la gráfica "desciende", y la función **decrece**. Precizando un poco más:

Una **función** es **creciente** en un intervalo, cuando dados dos puntos cualesquiera del mismo

- Si  $x_1 < x_2$  entonces  $f(x_1) < f(x_2)$

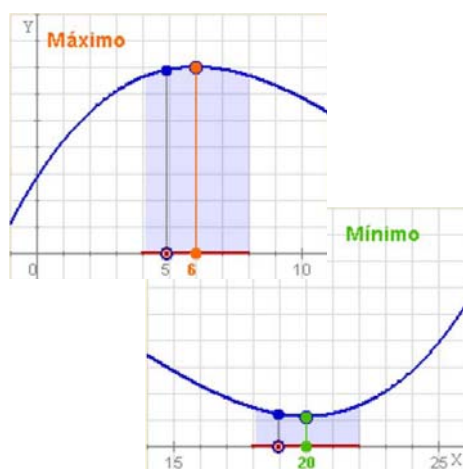
Y será **decreciente**:

- Si  $x_1 < x_2$  entonces  $f(x_1) > f(x_2)$



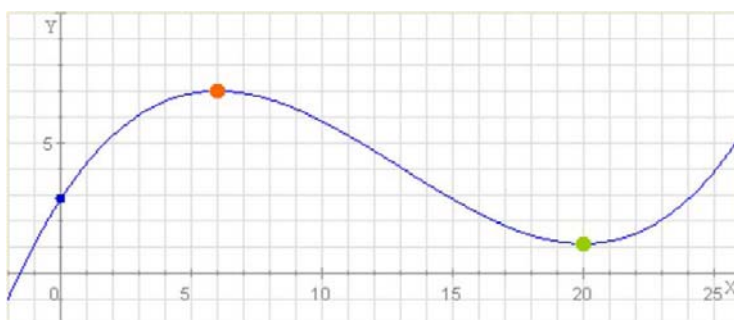
Todas las funciones no crecen o decrecen, de la misma manera.  $f(x)=x^2$  es la que crece más deprisa,  $g(x)=x$  tiene un crecimiento lineal,  $h(x)=\sqrt{x}$  crece más lentamente.

## Máximos y mínimos



Dada una función continua en un punto  $x=a$ , se dice que presenta un **máximo relativo**, si a la izquierda de dicho punto la función es creciente y la derecha la función es decreciente.

Si, por el contrario, la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha hay un **mínimo relativo**.



Si se verifica que  $f(a) > f(x)$  para cualquier valor  $x$  del dominio, y no sólo para los valores de "alrededor", se habla de **máximo absoluto** en  $x=a$ .

Y análogamente se dice que en  $a$  hay un **mínimo absoluto** si  $f(a) < f(x)$  para cualquier  $x$  del dominio.

## EJERCICIOS resueltos

8. Calcula la tasa de variación media de las funciones siguientes entre los puntos indicados. Comprueba en la figura que en las funciones cuyo gráfico es una recta la TVM es constante.

a)  $y=2x+3$

$$TVM[1,3] = \frac{9-5}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$TVM[-5,-2] = \frac{-1+7}{-2+5} = \frac{6}{3} = 2$$

b)  $y=0,5x+3$

$$TVM[1,3] = \frac{4,5-3,5}{2} = 0,5$$

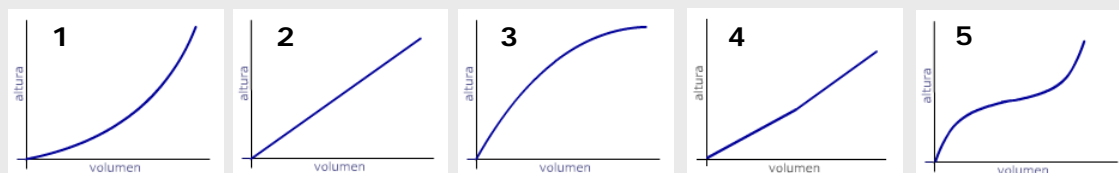
$$TVM[-3,0] = \frac{3-1,5}{3} = 0,5$$





## EJERCICIOS resueltos

9. Las gráficas representan el llenado de los distintos recipientes, ¿qué gráfica corresponde a cada uno?



- a → 2  
b → 4  
c → 5  
d → 3  
e → 1

10. Recuerda la función que daba el "perfil" de una etapa de la Vuelta, que viste en el primer capítulo.

- Escribe los intervalos de crecimiento o decrecimiento.
- ¿En qué punto kilométrico se alcanzan los máximos relativos? ¿Qué valor toman? ¿Y los mínimos?
- ¿Hay máximo ó mínimo absoluto?

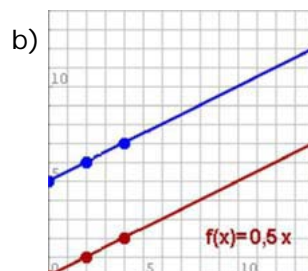
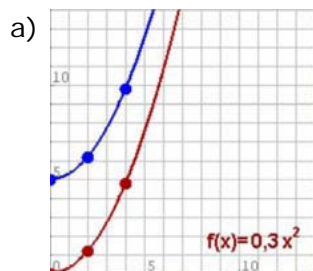


- Creciente:  $(0,24) \cup (34,71) \cup (87,113) \cup (121,168)$   
Decreciente:  $(24,34) \cup (71,87) \cup (113,121)$
- MÁX:  $x=24, y=1280$ ;  $x=71, y=1290$ ;  $x=113, y=1020$ ;  
MÍN:  $x=34, y=740$ ;  $x=87, y=630$ ;  $x=121, y=720$
- En este caso la función tiene máximo y mínimo absolutos, que se alcanzan ambos en los extremos del dominio, mín en  $x=0$  de valor 540 m, máx en  $x=168$  de valor 1882 m.



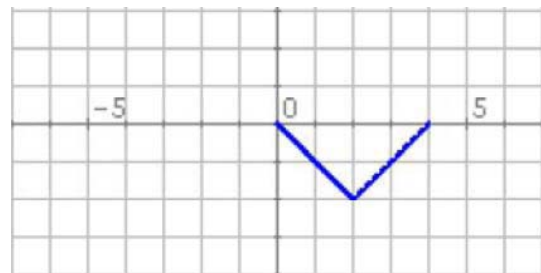
## Para practicar

1. Considera la función que a cada  $n^\circ$  le asigna su cuadrado menos 1. Escribe su expresión analítica y calcula la imagen de -1, 1 y 2. Calcula también los cortes con los ejes.
2. Considera la función que a cada  $n^\circ$  le asigna su mitad más 3. Escribe su expresión analítica y calcula la imagen de -1, 1 y 3. Calcula también los cortes con los ejes.
3. Considera la función que a cada  $n^\circ$  le asigna su doble menos 5. Escribe su expresión analítica y calcula la imagen de -2, -1 y 1. Calcula también los cortes con los ejes.
4. Calcula el dominio de las siguientes funciones:
  - a)  $f(x) = -2x^2 + 5x - 6$
  - b)  $f(x) = \frac{2x}{2x - 4}$
  - c)  $f(x) = \sqrt{x + 5}$
5. Calcula las TVM de las funciones de las gráficas siguientes en los intervalos  $[0,4]$  y  $[2,4]$ :

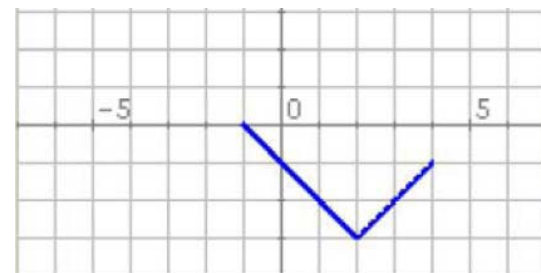


6. En cada caso la gráfica representa un tramo o periodo de una función periódica, representa otros tramos, indica el periodo y calcula la imagen del punto de abscisa que se indica:

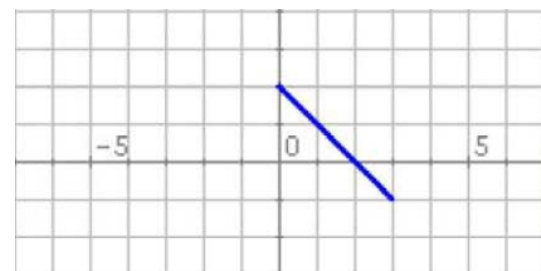
a)  $f(-2)$



b)  $f(-3)$



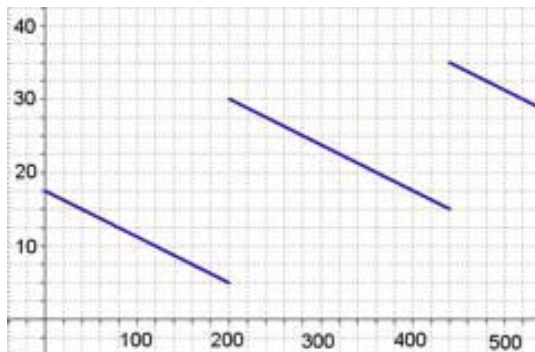
c)  $f(-1)$





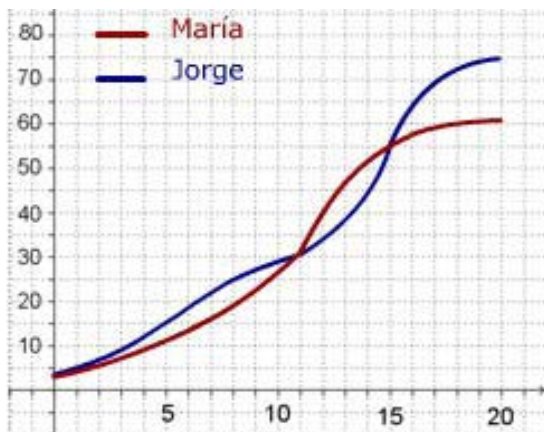
# Funciones y gráficas

7. El gráfico muestra cómo varía la gasolina que hay en mi coche durante un viaje de 520 km por una autovía.



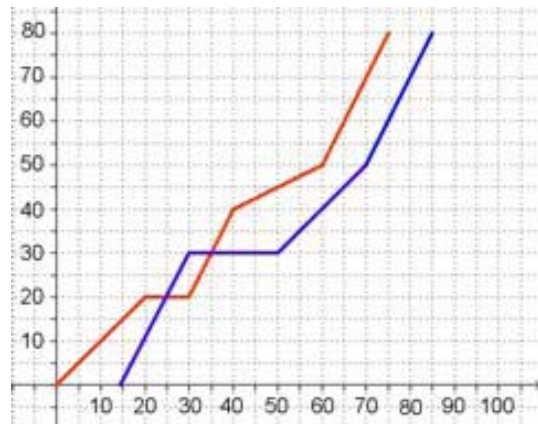
- ¿Cuánta gasolina había al cabo de 240 km?. En el depósito caben 40 litros, ¿cuándo estaba lleno más de medio depósito?
- ¿En cuántas gasolineras paré?, ¿en qué gasolinera eché más gasolina?. Si no hubiera parado, ¿dónde me habría quedado sin gasolina?
- ¿Cuánta gasolina usé en los primeros 200 km?. ¿Cuánta en todo el viaje?. ¿Cuánta gasolina gasta el coche cada 100 km en esta autovía?

8. María y Jorge son dos personas más o menos típicas. En la gráfica puedes comparar como ha crecido su peso en sus primeros 20 años



- ¿Cuánto pesaba Jorge a los 8 años?, ¿y María a los 12?. ¿Cuándo superó Jorge los 45 kg?
- ¿A qué edad pesaban los dos igual? ¿Cuándo pesaba Jorge más que María?, ¿y María más que Jorge?
- ¿Cuál fue el promedio en kg/año de aumento de peso de ambos entre los 11 y los 15 años?. ¿En qué periodo creció cada uno más rápidamente?

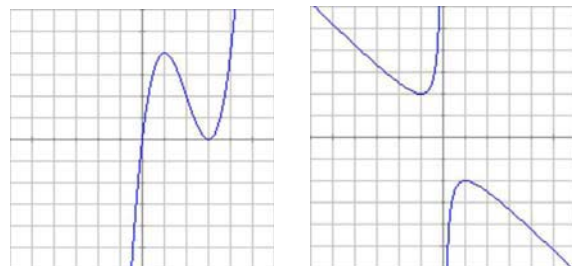
9. El gráfico da el espacio recorrido por dos coches que realizan un mismo trayecto.



- ¿Cuál es la distancia recorrida? ¿Si el primer coche salió a las 10:00, a qué hora salió el 2º?. ¿Cuánto le costó a cada uno hacer el recorrido?
- ¿Cuánto tiempo y dónde estuvo parado cada coche?. ¿En qué km adelantó el 2º al 1º?, ¿y el 1º al 2º?
- ¿Qué velocidad media llevaron en el trayecto total?, ¿en qué tramo la velocidad de cada coche fue mayor?

10. Las gráficas siguientes corresponden a las funciones I y II.

I)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$     II)  $f(x) = -\frac{x^2 + 1}{x}$



Calcula en cada una:

- El dominio.
- Los puntos de corte con los ejes.
- Los valores de x para los que la función es positiva y negativa.
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Los máximos y mínimos.
- ¿Presentan alguna tendencia especial?

Para saber más



## La primera función

El primero en construir una función fue **Galileo** (1564-1642). Desde lo alto de la torre inclinada de Pisa tiró dos bolas, una de hierro y otra de madera y comprobó que a pesar de la diferencia de peso, ambas llegaban al suelo a la vez, había descubierto la ley de caída de los cuerpos.

Continuando su estudio y empleando un curioso artificio, comprobó que el espacio recorrido depende del cuadrado del tiempo, escribiendo la primera función de la historia.

La primera definición formal de función se debe a **Euler**, quien en el libro *Introductio in analysis infinitorum*, publicado en 1748, dice:

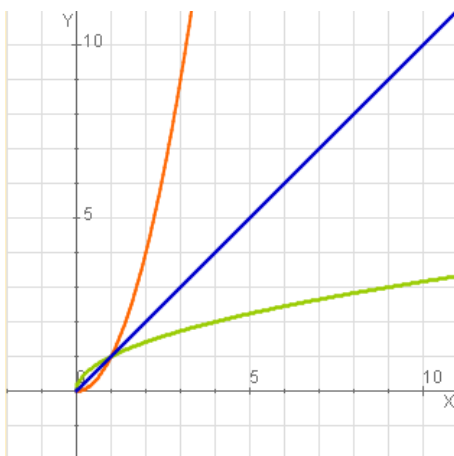
*"Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes".*

En 1755 en *Institutiones calculi differentialis*, vuelve sobre el tema acercándose más a la que hoy utilizamos.

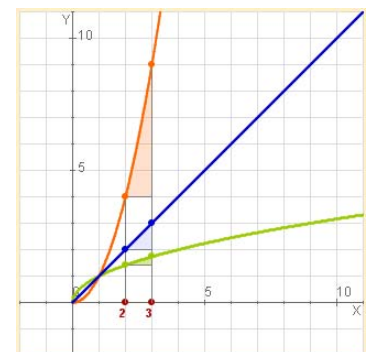
## TVM y crecimiento

Como has visto la TVM de las funciones cuya gráfica es una recta es constante, entonces su crecimiento será siempre el mismo, decimos que es lineal.

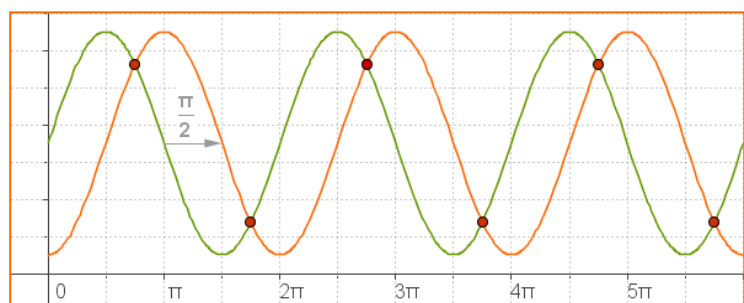
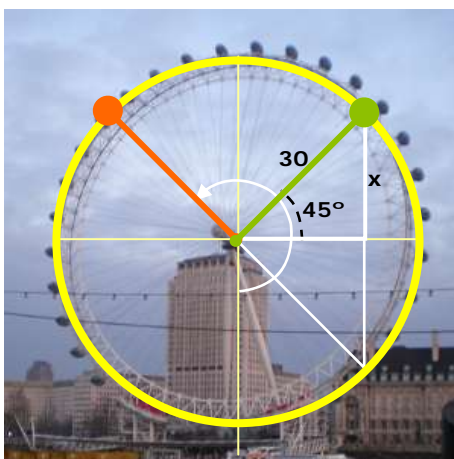
Si observas las tres funciones de la izquierda, son crecientes. Comparemos el crecimiento de las tres:



$h(x)=\sqrt{x}$	<b>TVM[2,3]= 0,32</b>	cada vez menor
$g(x)=x$	<b>TVM[2,3]= 1</b>	se mantiene constante
$f(x)=x^2$	<b>TVM[2,3]= 5</b>	cada vez mayor



$f(x)$  crece "deprisa",  
 $g(x)$  tiene un crecimiento lineal,  $h(x)$  crece "despacio".



Observa las dos gráficas, ambas funciones son periódicas de periodo  $2\pi$ , la gráfica verde está desfasada  $\pi/2$  respecto a la naranja; fíjate donde alcanzan los máximos y los mínimos.

Cuando coinciden las dos gráficas, ¿a qué altura están?,  
 $x=r \cdot \sin 45^\circ = 21,21$  m; 1)  $35 - 21,21 = 13,79$  2)  $35 + 21,21 = 56,21$



## Recuerda lo más importante

- Una **función** es una relación entre dos variables  $x$  e  $y$ , de modo que a cada valor de la variable independiente,  $x$ , le asocia un único valor de la variable  $y$ , la dependiente.
- El **dominio** de una función es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar  $x$ .
- La **gráfica** de una función es el conjunto de puntos  $(x, f(x))$  representados en el plano.
- Una función es **continua** si puede representarse con un solo trazo. Es **discontinua** en un punto si presenta un "salto" o no está definida en ese punto.
- Una función es **periódica** de periodo  $t$ , si su gráfica se repite cada  $t$  unidades,  $f(x+t)=f(x)$ .
- Una función es **simétrica** respecto al eje OY, función par, si  $f(x)=f(-x)$ ; y es simétrica respecto al origen, función impar, si  $f(-x)=-f(x)$ .
- La **tasa de variación** de una función entre dos puntos es la diferencia: **TV** $[x_1, x_2]=f(x_2)-f(x_1)$  La **tasa de variación media** es:

$$TVM[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

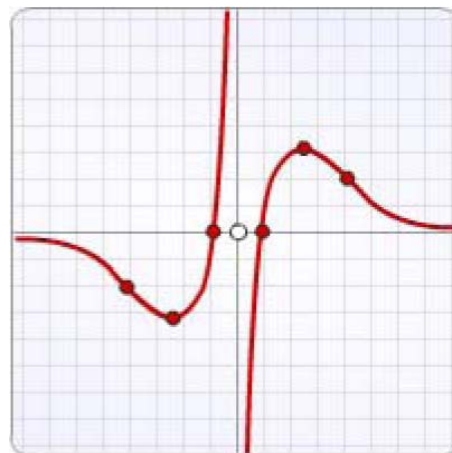
- Una función es **creciente** en un intervalo, cuando dados dos puntos cualesquiera del mismo

$$\text{Si } x_1 < x_2 \text{ entonces } f(x_1) < f(x_2)$$

- Y es **decreciente**

$$\text{Si } x_1 < x_2 \text{ entonces } f(x_1) > f(x_2)$$

- Una función continua en un punto  $x=a$ , presenta un **máximo** relativo, si a la izquierda de dicho punto es creciente y la derecha es decreciente. Si, por el contrario, es decreciente antes y creciente después hay un **mínimo** relativo.



### Dominio

Todos los reales excepto el 0

### Continuidad

No es continua, en 0 presenta una discontinuidad de salto infinito.

### Simetría

Es simétrica respecto al origen de coordenadas, función impar.

### Cortes con los ejes

Al eje de abscisas en  $(-1,0)$  y  $(1,0)$ ; no corta al eje de ordenadas.

### Crecimiento y decrecimiento

Es creciente en  $(-\infty, -2,5) \cup (2,5, +\infty)$   
Y decreciente en  $(-2,5, 0) \cup (0, 2,5)$

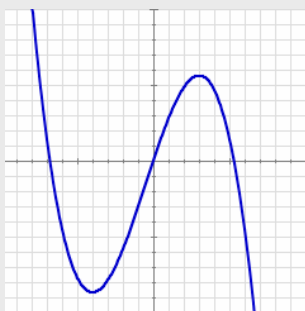
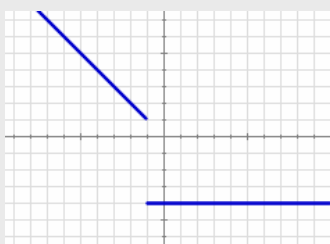
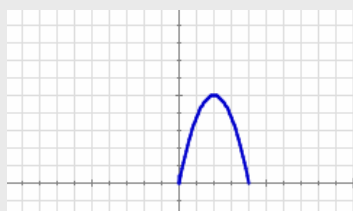
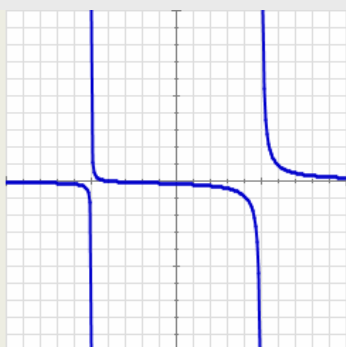
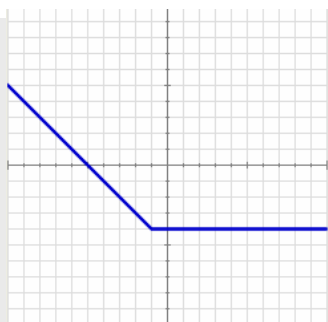
### Máximos y mínimos

Máximo en  $(2,5, 3)$ ;  
Mínimo en  $(-2,5, 3)$

### Tendencia

Tiene una asíntota horizontal

## Autoevaluación



1. Calcula la imagen del cero en la función de la gráfica adjunta.
2. Calcula el dominio de la función correspondiente a la gráfica de la izquierda.
3. ¿Cuál de los puntos siguientes:  $A(-3,14)$ ;  $B(1,3)$ ;  $C(0,8)$ , no pertenece a la gráfica de la función

$$f(x) = -x^2 - 5x + 8$$

4. Calcula los puntos de corte con los ejes de coordenadas de la recta de ecuación  $y = -x + 5$
5. Si  $y=f(x)$  es una función IMPAR y  $f(-1)=-8$  ¿cuánto vale  $f(1)$ ?
6. La gráfica muestra el primer tramo de una función periódica de periodo 4 y expresión  $f(x)=-1,25x^2+5x$  si  $x$  está entre 0 y 4. Calcula  $f(17)$ .
7. ¿En qué punto debe comenzar el tramo horizontal de la gráfica adjunta para que la función a la que representa sea continua?
8. Calcula la TVM en el intervalo  $[-2,-1]$  de la función  $f(x) = -x^2 - x + 4$ .
9. Determina el intervalo en el que la función de la gráfica adjunta es creciente.
10. Un ciclista sale de un punto, A, hacia otro, B, distante 70 km a una velocidad constante de 35 km/h. A la vez, sale otro de B con dirección hacia A a 40 km/h. ¿A cuántos km del punto A se cruzan en la carretera?

# Funciones y gráficas

## Soluciones de los ejercicios para practicar

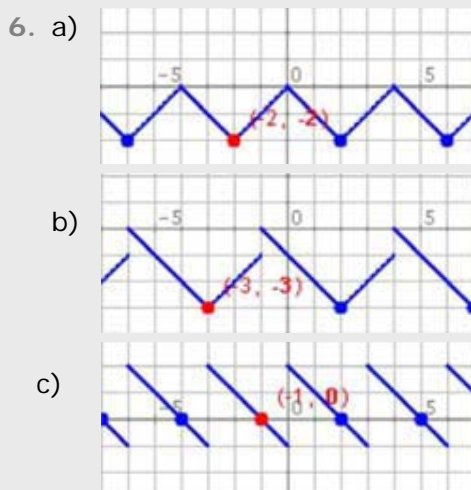
1.  $f(x)=x^2-1$   
 $f(-1)=0, f(2)=3, f(1)=0$   
 Corte OY: -1 Corte OX: 1 y -1

2.  $y = \frac{x}{2} + 3$   
 $f(-1)=2,5 f(1)=3,5 f(3)=4,5$   
 Corte OY: 3 Corte OX: -6

3.  $f(x)=2x-5$   
 $f(-2)=-9, f(-1)=-7, f(1)=-5$   
 Corte OY: -5 Corte OX: 2,5

4. a) R  
 b)  $\mathbb{R}-\{2\}$   
 c)  $\{x \geq -5\}$

5. a)  $TVM[0,4]=TVM[2,4]=0,5$   
 b)  $TVM[0,4]=1,2; TVM[2,4]=1,8$



7. a) 27,5 litros; entre los km 200 y 360 y del 440 hasta el 520.  
 b) En dos, una en el km 200 y otra en el 440; eché más en la 1ª; a los 280 km  
 c) 12,5 l; 32,5 l; 6,25 l/100 km

8. a) J. 25 kg, M. 35 kg ; a los 14 años  
 b) A los 11 (30 kg) y a los 15 (55 kg) J más que M: hasta los 11 y desde los 15; M más que J: de los 11 a 15  
 c) 25kg; 6,25 kg/año; M entre los 11 y 12 (10 kg/año); J entre los 12-14 (10 kg/año)

9. a) 80 km; a las 10:15; 75 y 70 min  
 b) 10 min en km 20, 20 min en km 30; en el km 20 y en 30 respectivamente.  
 c) 64 km/h y 68,6 km/h; 1º: min 60-75 2º: min 15-30 y min 70-85

10. I)  
 a)  $\mathbb{R}$   
 b)  $(0,0)(3,0)$   
 c)  $y > 0 (0, +\infty); y < 0 (-\infty, 0);$   
 d)  $\text{crec: } (-\infty, 1) \cup (3, +\infty),$   
 $\text{decrec: } (1, 3);$   
 e)  $\text{max } x=1, \text{ mín } x=3;$   
 f) No
- II)  
 a)  $\mathbb{R}-\{0\}$   
 b) No corta  
 c)  $y < 0 (0, +\infty); y > 0 (-\infty, 0)$   
 d)  $\text{decrec: } (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$   
 $\text{crec: } (-1, 0) \cup (0, 1);$   
 e)  $\text{max } x=1, \text{ mín } x=-1;$   
 f) lineal.

### Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1.  $f(0) = -4$
2.  $\mathbb{R} - \{5, -5\}$
3.  $(1, 3)$
4.  $(0, 5) (5, 0)$
5.  $f(1) = 8$
6.  $f(17) = f(1) = 3,75$
7.  $(-1, 1)$
8.  $TVM[-2, -1] = 2$
9.  $(-4, 3)$
10. A 32,7 km de A.

No olvides enviar las actividades al tutor ►