

Objectius

Aquesta quinzena aprendràs a:

- Trobar els esdeveniments d'un experiment aleatori i operar amb ells.
- Calcular la probabilitat d'un esdeveniment aplicant la regla de Laplace.
- Conèixer les propietats de la probabilitat.
- Trobar la probabilitat d'un esdeveniment en un experiment compost.
- Calcular probabilitats d'esdeveniments dependents i independents.
- Aplicar la probabilitat a situacions de la vida quotidiana.

Abans de començar

1. Experiments aleatoris pàg. 226
Espai mostral i esdeveniments
Operacions amb esdeveniments
Esdeveniments compatibles i incompatibles
2. Probabilitat d'un esdeveniment.... pàg. 228
Regla de Laplace
Freqüència i probabilitat
Propietats de la probabilitat
3. Experiments compostos pàg. 230
Regla de la multiplicació
Extraccions amb i sense devolució
Probabilitat condicionada
Probabilitat amb diagrames d'arbre

Exercicis per practicar

Per saber-ne més

Resum

Autoavaluació

Abans de començar

Investiga

Imagina que ets en un concurs de televisió en el qual t'ofereixen tres portes perquè en triïs una.

Al darrere d'una de les portes hi ha un cotxe i darrere de cadascuna de les altres hi ha un ase.



Tries una porta, suposem que la de l'estrella verda, i abans d'obrir-la, el presentador - que sap el que hi ha al darrere de cadascuna- obre una de les dues que no has triat, la vermella, i que per descomptat amagava un ase, i llavors et dona l'oportunitat de canviar la teva tria.

Naturalment, tu el que vols és endur-te'n el cotxe. Què faries, canviar de porta o no canviar?



Suposem que canviessis de porta i al final et quedasses amb la blava, i... guanyessis el cotxe! En aquest cas t'ha sortit bé canviar la primera tria. Què en penses? Convé canviar o és igual? Al llarg d'aquesta unitat ho descobriràs!

1. Experiments aleatoris

Espai mostral i esdeveniments

Si traiem una carta d'una baralla, llancem una moneda, tirem un dau, i en d'altres exemples anàlegs, no podem saber per endavant el resultat que obtindrem. Són experiments **aleatoris**, aquells en què no es pot predir el resultat, i ens n'ocuparem aquí.

El conjunt de tots els resultats possibles d'un experiment aleatori es diu **espai mostral**, i cadascun d'aquests possibles resultats és un **esdeveniment elemental**.

✓ Un **esdeveniment** és qualsevol subconjunt de l'espai mostral. Es verifica quan ocorre qualsevol dels esdeveniments elementals que el formen.

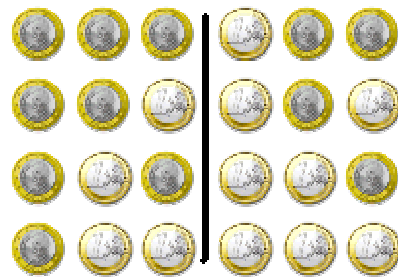
Hi ha un esdeveniment que es verifica sempre, anomenat **esdeveniment segur**, que és el mateix espai mostral

• En llençar una moneda i un dau, una forma de representar l'espai mostral és:



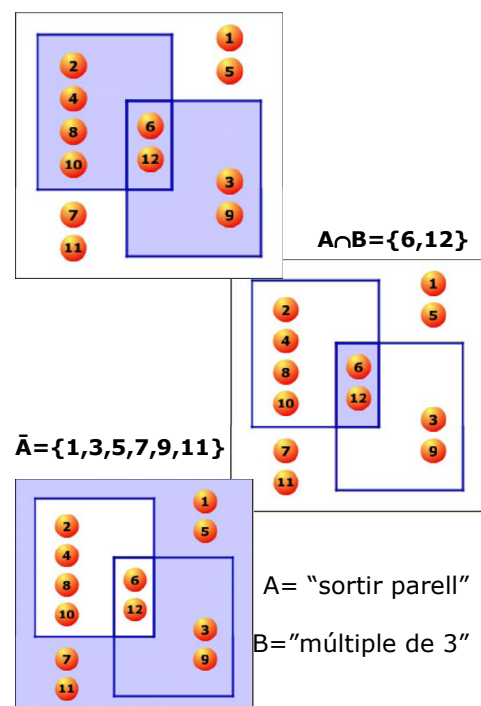
O bé: (cara, 1) (cara, 2),...

• En llençar tres monedes (o una moneda tres vegades) l'espai mostral és:



$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$



Operacions amb esdeveniments

L'esdeveniment **contrari** d'un esdeveniment A, està format pels esdeveniments elementals de l'espai mostral que no estan en A. És el que ocorre quan no es verifica A i s'indica \bar{A} .

- L'esdeveniment contrari del segur és l'esdeveniment **impossible**, que no es verifica mai, s'escriu \emptyset .

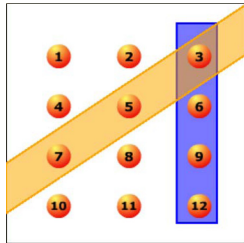
Amb els esdeveniments d'un experiment aleatori es poden efectuar diferents operacions. Donats dos esdeveniments A i B:

- La **unió** de A i B, $A \cup B$, és l'esdeveniment format per tots els esdeveniments elementals de A i de B. Es verifica quan succeeix A o succeeix B o tots dos.
- La **intersecció**, $A \cap B$, és l'esdeveniment format pels esdeveniments elementals comuns a A i B. Es verifica quan ocorren A i B a la vegada.
- La **diferència** de A i B, $A \setminus B$, és l'esdeveniment format pels esdeveniments elementals de A que no pertanyen a B. Es verifica si succeeix A però no succeeix B, $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Esdeveniments compatibles i incompatibles

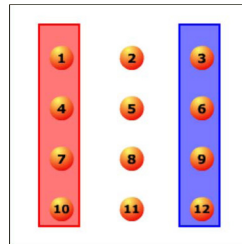
Esdeveniments compatibles

Quan surt 3 ocorren ambdós.



Esdeveniments incompatibles

No ocorren a la vegada, però no són contraris



En un experiment aleatori hi ha esdeveniments que es poden verificar a la vegada i d'altres que no.

- Dos esdeveniments són **compatibles** si tenen algun esdeveniment elemental comú. En aquest cas $A \cap B \neq \emptyset$: es poden verificar a la vegada.
- Dos esdeveniments són **incompatibles** si no tenen cap esdeveniment elemental en comú: en aquest cas $A \cap B = \emptyset$ i no es poden verificar a la vegada.

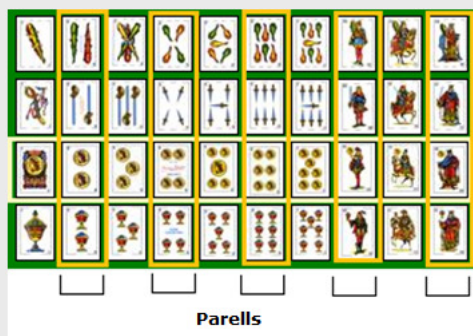
Un esdeveniment i el seu contrari són sempre incompatibles, però dos esdeveniments incompatibles no sempre són contraris, com es pot comprovar en els exemples de l'escena.

EXERCICIS resolts

1. En una bossa tenim tres boles numerades 1, 2 i 3. Considerem l'experiment d'extreure una bola i anotar el seu nombre. Escribeu tots els esdeveniments possibles. Indica quins són els elementals.

$\{ \}, \{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1\}, \{2\}$ i $\{3\}$. Els tres últims són els elementals.

2. En una baralla, amb l'experiment d'extreure una carta, considera els esdeveniments: a) parell, b) oros, c) parell oros, d) parell o oros, e) parell menys oros, f) oros menys parell i g) no parell



Observa la imatge,

- a) hi ha 20 cartes envoltades de color taronja, les parells.
- b) 10 oros.
- c) El 2, 4, 6, 10 i 12 d'oros són parells.
- d) Tots els oros i parells junts són 25 cartes (totes les envoltades pel color groc o taronja).
- e) Als 2, 4, 6, 10 i 12 s'han de treure el 2, 4, 6, 10 i 12 d'oros, a 20 cartes se li treuen 5, en queden 15
- f) El 1, 3, 5, 7 i 11 d'oros.

3. En tirar un dau considerem els esdeveniments: $A = \{\text{parell}\}$, $B = \{\text{major que 3}\}$, i $C = \{\text{senar}\}$. Dels tres parells d'esdeveniments possibles AB , AC i BC , indica quins són compatibles i/o incompatibles:

AB compatibles, quan surti el 4 o el 6.

AC incompatibles, si és parell no pot ser senar.

BC compatibles, quan surti el 5.

2. Probabilitat d'un esdeveniment

La regla de Laplace

Si un experiment aleatori és regular, és a dir, que tots els esdeveniments elementals tenen la mateixa probabilitat de verificar-se o són **equiprobables**, per calcular la probabilitat d'un esdeveniment qualsevol A, n'hi ha prou amb comptar i fer el quocient entre el nombre d'esdeveniments elementals que formen A (**casos favorables**) i el nombre d'esdeveniments elementals de l'espai mostral (**casos possibles**).

$$P(A) = \frac{\text{nre. casos favorables}}{\text{nre. casos possibles}}$$

Aquest resultat es coneix com a **Regla de Laplace**. Observa que per poder aplicar-la és necessari que tots els casos possibles siguin igualment probables.

Freqüència i probabilitat

Amb la regla de Laplace, podem calcular la probabilitat d'un esdeveniment en experiments regulars, però si l'experiència és irregular o si no sabem la probabilitat de cadascun dels resultats possibles, aleshores hem d'acudir a l'**experimentació**.

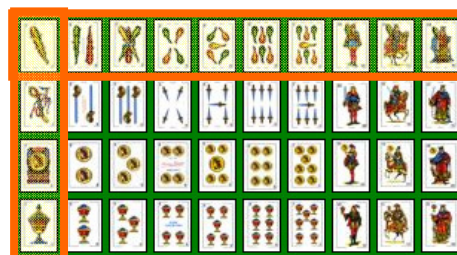
Com ja saps, la **freqüència absoluta** d'un esdeveniment és el nombre de vegades que apareix quan es repeteix un experiment aleatori, i la **freqüència relativa** és la freqüència absoluta dividida pel nombre de vegades, **n**, que es repeteix l'experiment aleatori. Quan aquest nombre **n** és molt gran, la freqüència relativa amb què apareix un esdeveniment tendeix a estabilitzar-se cap a un valor fix. Aquest resultat, conegut com **lleï dels grans nombres**, permet definir la probabilitat d'un esdeveniment com aquest nombre cap al qual s'aproxima la freqüència relativa en repetir l'experiment moltes vegades.

EXEMPLE

Sospitem que un dau està trucat i ens entretenim en tirar-lo 1000 vegades i anotar els resultats, obtenint:

	1	2	3	4	5	6
F	203	297	146	154	98	102
Fr	0.2	0.3	0.15	0.15	0.1	0.1

Concloure'm, $P(1)=P(2)=\dots$ ja no és $1/6$, sinó aproximadament $P(1)=0,2$; $P(2)=0,3$ etc. Aquí estarem fent servir la freqüència relativa com probabilitat, d'ara en endavant ho tindrem en comte quan juguem amb aquest dau.



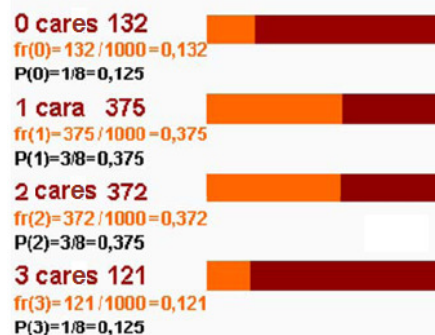
Traiem una carta d'una baralla de 40:

$$P(\text{bastos}) = 10/40 = 0,25$$

$$P(\text{as}) = 4/40 = 0,1$$

$$P(\text{as de bastos}) = 1/40 = 0,025$$

Resultats obtinguts en la simulació del llançament de tres monedes 1000 vegades



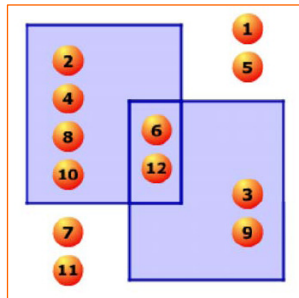
Propietats de la probabilitat

A="parell" B="múltiple de 3"

$P(A)=6/12=1/2$ $P(B)=4/12=1/3$

$P(\bar{A})=1/2$ $p(\bar{B})=2/3$

$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$



Si tenim en compte la relació entre freqüència relativa i probabilitat, es verifica que:

- La probabilitat d'un esdeveniment és un nombre comprès entre 0 i 1.
- La probabilitat de l'esdeveniment **segur** és 1 i la de l'**impossible**, 0.
- La probabilitat de la unió de dos esdeveniments **incompatibles** A i B és $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

I a més, d'aquestes propietats es dedueix que:

- La probabilitat del contrari és $p(A) = 1 - P(A)$
- La probabilitat de la unió de dos esdeveniments compatibles és $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

EXERCICIS resoltos

4. Tenim un dau de 20 cares $\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,6,6,6,6\}$ perfectament equilibrat.

a) Quina és la probabilitat d'obtenir cada un dels resultats possibles?

$P(1)=1/20=0,05$ $P(2)=2/20=0,1$ $P(3)=3/20=0,15$
 $P(4)=4/20=0,2$ $P(5)=5/20=0,25$ $P(6)=5/20=0,25$

- b) $P(\text{parell}) = 11/20 = 0,55$ N'hi ha dos 2 i quatre 4, i cinc 6, 11 parells
 c) $P(\text{major que } 3) = 14/20 = 0,70$ 14 possibles entre 20
 d) $P(\text{parell i major que } 3) = 9/20 = 0,45$ El 4 i el 6 són parells i més grans que 3
 e) $P(\text{parell o major que } 3) = 19/20 = 0,95$ Si surt 2, 4, 5 ó 6

5. En una bossa tenim 7 boles vermelles, 9 boles blaves i 4 verdes. Extraiem una bola, calcula la probabilitat que:

- a) No sigui vermella $P(\bar{V}) = 13/20 = 0,65$ N'hi ha 20 boles, 7 vermelles, 13 no vermelles
 b) Sigui vermella o blava $P(V \cup B) = 16/20 = 0,8$ $7+9=16$ vermelles o blaves

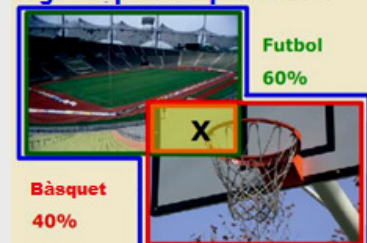
6. En una urna hi ha 40 boles vermelles i blaves, no sabem quantes de cada color. Per esbrinar-ho, n'extraiem una bola, mirem el color i la retornem a l'urna abans de treure'n una altra. Repetim l'experiment 1000 vegades i obtenim 807 boles vermelles i 193 boles blaves. Quantes boles de cada color estimes que hi ha en l'urna?

$P(\text{vermella}) = 0,81$ $P(\text{blava}) = 0,19$ $0,81 \cdot 40 \approx 32$ vermelles $0,19 \cdot 40 \approx 8$ blaves

7. En un grup, el 40% juga a bàsquet i el 60% a futbol. Sabent que el 85% practica algun dels dos esports, quin percentatge juga als dos?

$P(F) = 0,60$ $P(B) = 0,40$ $P(F \cup B) = 0,85$
 $P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B)$
 $0,85 = 0,60 + 0,40 - P(F \cap B)$ $P(F \cap B) = 0,15 \rightarrow 15\%$

Algun esport d'aquests 85%



8. En una classe el 68% aprova Llengua i el 66% Matemàtiques. Si el 43% ha aprovat les dues assignatures, quin percentatge no aprova cap de les dues?

Aprova al menys una de les dues: $P(L \cup M) = P(L) + P(M) - P(L \cap M) = 0,68 + 0,66 - 0,43 = 0,91$
 Suspèn les dues és l'esdeveniment contrari a l'anterior, per tant la seva probabilitat és $1 - 0,91 = 0,09$
 El 9% ha suspès les dues assignatures.

Probabilitat

3. Experiments compostos

Regla de la multiplicació

Un **experiment compost** és el que està format per diversos experiments simples que es realitzen de forma consecutiva.

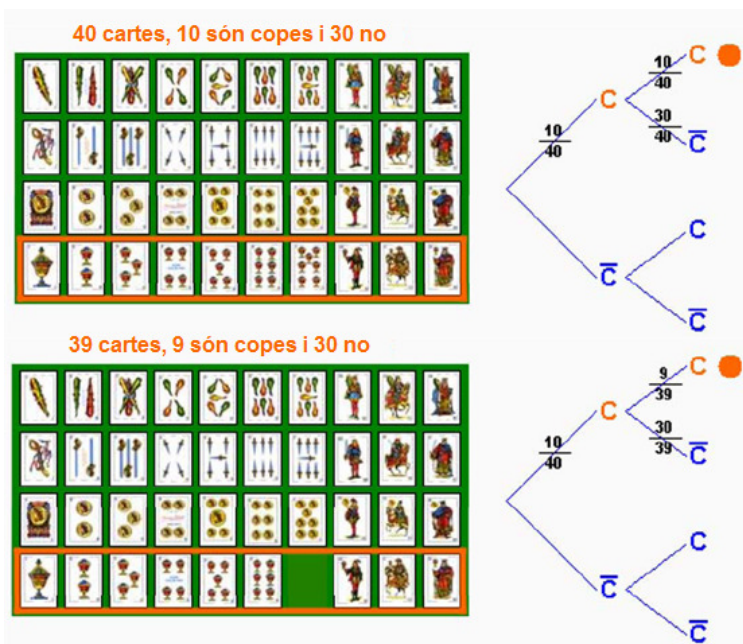
Per calcular l'espai mostral d'un experiment compost convé, en molts casos, fer un diagrama d'arbre que representi totes les possibilitats. Cada resultat ve donat per un camí del diagrama. Observa en l'exemple com construir un diagrama d'arbre.

Si et fixes en l'exemple anterior, a l'indicar la probabilitat de cada branca del camí, s'obté la probabilitat de cada esdeveniment compost calculant el producte dels respectius esdeveniments simples.

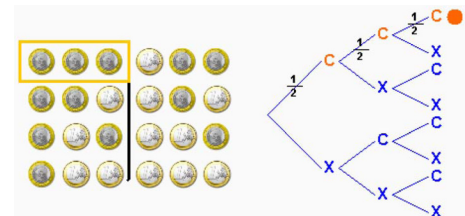
Per calcular la probabilitat d'un esdeveniment en un experiment compost es **multipliquen** les probabilitats dels esdeveniments simples que el formen.

Extraccions amb i sense devolució

Tenim un exemple d'experiment compost en l'extracció successiva de cartes o de boles d'una urna...: en aquests casos, s'ha de considerar si es retorna la carta, bola, etc, abans de treure la següent o no.

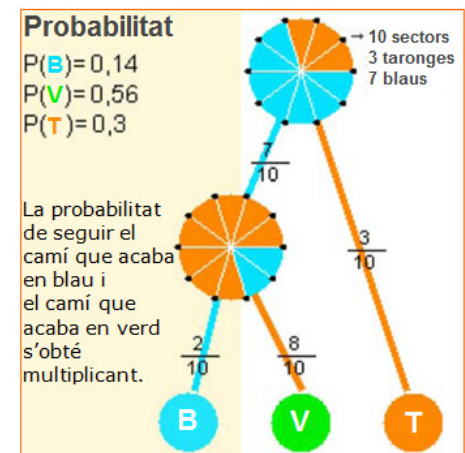


Tirem una moneda tres vegades seguides, quina és la probabilitat d'obtenir tres cares?



8 casos possibles
1 cas favorable

$$P(\text{CCC}) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$



Traiem successivament dues cartes d'una baralla de 40. Quina és la probabilitat que les dues siguin de copes?

La probabilitat que la primera carta sigui de copes és 10/40.

Per la segona, la probabilitat depèn de que retornem la primera carta a la baralla o no.

Amb devolució


$$P(\text{CC}) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16}$$

Sense devolució

$$P(\text{CC}) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$$

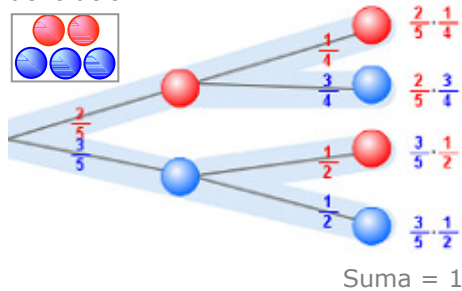
$$\begin{aligned}
 P(B/A) &= \frac{\text{Casos favorables de B ocurrent A}}{\text{Casos possibles ocurrent A}} = \\
 &= \frac{\text{Casos favorables de A i B}}{\text{Casos favorables de A}} = \\
 &= \frac{\frac{\text{Casos favorables de A i B}}{\text{Casos favorables en total}}}{\frac{\text{Casos favorables de A}}{\text{Casos favorables en total}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}
 \end{aligned}$$

En una urna tenim boles vermelles i blaves numerades com a la figura. Quina és la probabilitat de treure cada un dels nombres?

$P(1) = 3/8$ 
 $P(2) = 3/8$ 
 $P(3) = 2/8$ 

Si sabem que la bola és vermella
 $P(1/V) = 2/4$ (de 4 vermelles n'hi ha 2 amb 1)
 $P(1) < P(1/V)$ s'afavoreixen
 $P(2/V) = 1/4$ (de 4 vermelles n'hi ha 1 amb 2)
 $P(2) > P(2/R)$ no s'afavoreixen
 $P(3/V) = 1/4$ (de 4 vermelles n'hi ha 1 amb 3)
 $P(3) = P(3/R)$ són independents.

En una urna hi ha 2 boles vermelles i 3 blaves, extraiem dues boles sense devolució.



Probabilitat que les dues siguin vermelles:

$$P(V_1 V_2) = P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

Probabilitat que les dues siguin blaves:

$$P(B_1 B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) =$$

Probabilitat de que siguin del mateix color:

$$P(V_1 V_2 \cup B_1 B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{5}$$

Probabilitat que siguin de diferent color:

$$P(V_1 B_2 \cup V_2 B_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{5}$$

Probabilitat condicionada

Quan es fan observacions de diferents esdeveniments, pot passar que uns depenguin dels altres.

Els esdeveniments "el dia és gris" i "portar paraigua" influeixen un en l'altre. Els esdeveniments *estudiar* i *aprovar*, són esdeveniments que s'afavoreixen: si s'estudia, augmenta la probabilitat d'aprovar.

La probabilitat que es verifiqui un esdeveniment B quan se'n verifica un altre A, s'anomena **condicionada**, s'expressa $P(B/A)$ i es llegeix "probabilitat de A condicionada a B"

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Donats dos esdeveniments, es diu que són **independents** si la verificació d'un no influeix en la probabilitat de l'altre, és a dir, si $P(B/A) = P(B)$; en cas contrari són **dependents**.

✓ A i B independents: $P(B/A) = P(B)$

i si tenim en compte la fórmula anterior per a $p(B/A)$,

✓ A i B independents: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Probabilitat amb diagrames d'arbre

Com has pogut veure, en els experiments compostos es pot fer un diagrama en arbre, i cada resultat ve donat per un camí en aquest arbre.

Per calcular una probabilitat només s'ha de dibuixar el camí corresponent, i el producte de les probabilitats de totes les branques que el formen serà el valor que busquem.

Així, si ocorre A i després B:

$$P(A \text{ i } B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

En un diagrama d'arbre:

✓ La suma de les probabilitats de tots els camins és igual a 1.

✓ La probabilitat d'un esdeveniment compost per diferents camins es calcula sumant la dels camins respectius.

EXERCICIS resolts

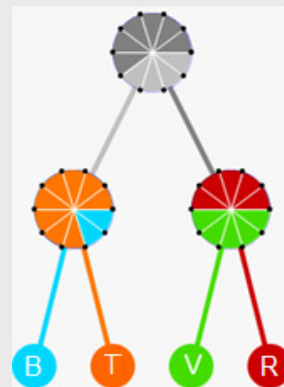
9. En les ruletes de la figura adjunta, calcula la probabilitat de cada un dels camins.

$$P(\text{blau}) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08$$

$$P(\text{taronja}) = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32$$

$$P(\text{verd}) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,30$$

$$P(\text{roig}) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,30$$



10. Tirem un dau de 4 cares $\{1,2,3,4\}$ i un altre de 10 $\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4\}$. Quina és la probabilitat d'obtenir dos 3? I dos 4?

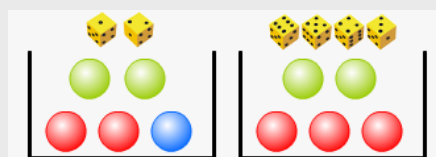
$$P(3 \text{ i } 3) = 1/4 \cdot 3/10 = 3/40 = 0.075$$

$$P(4 \text{ i } 4) = 1/4 \cdot 4/10 = 4/40 = 0.1$$

11. Tirem un dau, si surt 1 o 2 extraiem una bola de l'urna A i si no, de la B. Quina és la probabilitat d'extreure la bola blava?

La bola blava està en l'urna A, per a què surti ha tingut que sortir abans en el dau un 1 o un 2.

$$P(A) = 1/3 \cdot 1/5 = 1/15$$



12. En una bossa tenim 5 boles numerades de l'1 al 5. Extraiem dues boles, a) Quina és la probabilitat d'obtenir un 2 i un 3 si no retornem les boles extretes? b) I quina serà si les retornem?

Sense devolució $P = 1/5 \cdot 1/4 = 0.05$

Amb devolució $P = 1/5 \cdot 1/5 = 1/25 = 0.04$

13. En una caixa hi ha 6 boles blanques i 4 boles negres. Quina probabilitat hi ha de que en extreure dues boles siguin les dues blanques? Fes-ho sense devolució i amb devolució.

a) Sense devolució: $P(BB) = 6/10 \cdot 5/9 = 30/90 = 1/3$

b) Amb devolució: $P(BB) = 6/10 \cdot 6/10 = 36/100 = 18/50$

14. En una caixa hi ha 12 boles de tres colors, roges, blaves i verdes. Estan buides i en algunes hi ha premi i en altres no. La distribució de premis i colors és la que s'indica a la taula. Calcula les probabilitats següents i indica si els esdeveniments "premi" i "color" són dependents o independents en cada cas.

	●	●	●	TOTAL
AMB PREMI	1	1	2	4
SENSE PREMI	1	2	5	8
TOTAL	2	3	7	12

$$P(\mathbf{V}) = 3/12 = 1/4$$

$$P(\mathbf{V} \cap \text{premi}) = 1/12$$

$$P(\text{premi} / \mathbf{V}) = 1/3$$

$$P(\mathbf{B}) = 7/12$$

$$P(\mathbf{B} \cap \text{premi}) = 2/12$$

$$P(\text{premi} / \mathbf{B}) = 2/7$$

$$P(\mathbf{R}) = 2/12 = 1/6$$

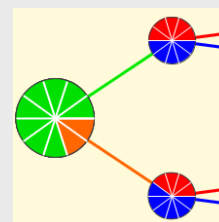
$$P(\mathbf{R} \cap \text{premi}) = 1/12$$

$$P(\text{premi} / \mathbf{R}) = 1/2$$

$P(\text{premi}) = 4/12 = \mathbf{1/3}$ Els esdeveniments "premi" i "verda" són independents, mentre que "premi" i "roja", "premi" i "blava" són dependents.

15. Calcula la probabilitat d'obtenir vermell en les ruletes de la figura.

$$P(R) = 0,8 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,4 = 0,48$$

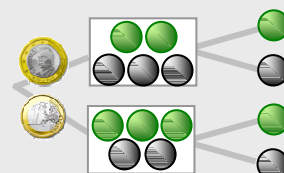


16. Llancem una moneda, si surt cara extraiem una bola d'una urna amb 2 boles verdes i 3 boles negres; si surt creu, de l'altra urna amb 3 boles verdes i 2 boles negres. Calcula la probabilitat que la bola extreta sigui verda.

$$P(C \text{ y } V) = 1/2 \cdot 2/5 = 1/5 = 0,2$$

$$P(X \text{ y } V) = 1/2 \cdot 3/5 = 3/10 = 0,3$$

$$P(V) = 0,2 + 0,3 = 0,5$$





Per practicar

1. Tirem un dau de dotze cares i anotem el nombre de la cara superior. Descriu els esdeveniments:

A="Treure un nombre parell"

B="Treure un nombre major que 6"

C="Treure un nombre menor que 3"

D="Treure múltiple de 3"

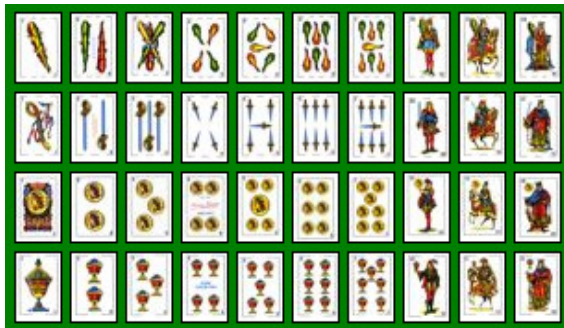
Indica quins parells d'aquests esdeveniments són incompatibles.

2. Triem una fitxa de dòmino a l'atzar, descriu els esdeveniments: A="La suma dels punts és més gran que 7"; B="La suma dels punts és un múltiple de 5".
Escriu $A \cap B$ i $A \cap \bar{B}$.

3. En l'experiment de treure una carta d'una baralla espanyola, considera els esdeveniments:

A="Treure una figura", B="Treure copes"

Escriu els esdeveniments: $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$



4. Amb un diagrama d'arbre construeix l'espai mostral de l'experiment de tirar 4 monedes. Considera els esdeveniments:

A="Sortir una cara"

B="Sortir almenys dues creus"

Escriu $A \cup B$, $A \cap B$ i l'esdeveniment contrari de B.

5. Traiem totes les fitxes dobles d'un joc de dòmino, i després traiem una fitxa a l'atzar. Calcula la probabilitat que la suma dels punts sigui múltiple de 5.

6. Formem tots els nombres possibles de tres xifres amb el 3, el 5 i el 6, repetides o no. En triem un a l'atzar. Calcula la probabilitat que acabi en 5.

7. Dins d'una capsa hi ha 3 boles vermelles, 3 boles verdes i 2 blaves. A una altra capsa hi ha 2 boles vermelles, 3 verdes i 2 blaves. En quina capsa és més gran la probabilitat de treure una bola de color blau?

8. Es tria a l'atzar un nombre entre els 30 primers nombres naturals (a partir de l'1). Calcula la probabilitat dels esdeveniments:

A="Sortir un nombre és gran que 3 i més petit que 17"

B="Sortir un múltiple de 3"

9. Damunt la taula tenim les dues cartes d'una baralla espanyola que apareixen a sota; traiem una altra carta. Calcula la probabilitat que sigui oros.



10. Un professor benvolent ha decidit corregir un examen de probabilitat de la forma següent:

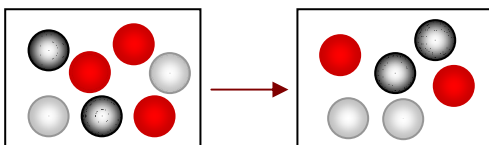
Tira dos daus i es fixa en la major de les puntuacions obtingudes, si aquesta és menor que 4 posa Insuficient i en els altres casos Suficient.

Amb aquest mètode, quina probabilitat té un estudiant d'aprovar?

11. La probabilitat d'un esdeveniment A és 0,15. Calcula la probabilitat de l'esdeveniment contrari?

Probabilitat

- 12.** Un dau està trucat de forma que les cares que són un nombre senar tenen triple probabilitat de sortir que les que no ho són. Calcula la probabilitat de cadascuna de les cares i la de treure un nombre senar.
- 13.** La probabilitat d'un esdeveniment A és $P(A)=0,14$ i la d'un altre B és $P(B)=0,39$. Si la probabilitat que passin tots dos a la vegada és $P(A \cap B)=0,13$, calcula la probabilitat que no passi cap dels dos.
- 14.** Considera dos esdeveniments A i B d'un experiment aleatori. Si $P(A)=0,16$, $P(A \cup B)=0,65$ i $P(A \cap B)=0,02$, calcula la probabilitat de $A - B$ i de $B - A$.
- 15.** Dins una urna hi ha boles blanques, vermelles i negres, però no sabem quantes ni en quina proporció. En 1000 extraccions (amb reposició) hem obtingut bola blanca 223 vegades, vermella 320 vegades i bola negra 457 vegades. En fer una nova extracció, quina probabilitat hi ha de treure una bola vermella? Si a l'urna hi ha 23 boles, quantes estimes que hi haurà de cada color?
- 16.** En una capsa hi ha 3 boles vermelles, 2 boles blanques i 2 boles negres. S'extreuen successivament dues boles. Calcula la probabilitat que totes dues siguin del mateix color si l'extracció es realitza:
a) amb devolució.
b) sense devolució.
- 17.** En una capsa, A, hi ha 3 boles vermelles, 2 boles blanques i 2 negres. En una altra capsa, B, hi ha 2 boles de cada color. S'extreu una bola de la capsa A i se passa a la B, seguidament es treu una bola de B. Calcula la probabilitat que aquesta última bola sigui negra.



- 18.** En una urna, A, hi ha 2 boles vermelles, 3 boles blanques i 3 boles negres. En una altra urna, B, hi ha 2 boles de cada color, vermell, blanc i negre. Tirem un dau, si surt un nombre més gran que 4, es treu una bola de l'urna A i si no, de la B. Calcula la probabilitat que la bola sigui vermella.
- 19.** S'extreuen dues cartes d'una baralla espanyola sense reposició. Calcula la probabilitat que
a) totes dues siguin del mateix coll,
b) una sigui d'oros i l'altre de copes.
- 20.** En un institut hi ha 450 estudiants, 290 dels quals són nois i la resta noies. El 20% dels nois i el 10% de les noies porten ulleres. Si triem un estudiant d'aquest institut a l'atzar, calcula la probabilitat que no porti ulleres.
- 21.** A una butxaca porto 6 monedes de 10 cèntims, 2 de 20 cèntims i 2 d'1 euro. Trec dues monedes a l'atzar. Calcula la probabilitat que:
a) les dues siguin d'1 euro
b) tregui 1,10 euros.
- 22.** En una empresa treballen 190 homes i 130 dones. Hi ha 19 homes i 26 dones que són fumadors. Si triem una persona d'aquesta empresa a l'atzar, calcula:
a) la probabilitat que sigui una dona i fumi.
b) la probabilitat que sigui una dona sabent que fuma.
- AJUDA: Completa la taula*
- | | FUMA | NO FUMA | |
|-------|------|---------|-----|
| HOMES | 19 | | 190 |
| DONES | 26 | | 130 |
| TOTAL | | | |
- 23.** Un jugador de bàsquet acostuma a encertar el 80% dels seus tirs des del punt de llançament de personals. Si tira tres vegades, calcula la probabilitat que:
a) faci bàsquet dos vegades.
b) no faci cap bàsquet.

Per saber-ne més



Una mica de història

La probabilitat va néixer lligada als jocs d'atzar. En les civilitzacions antigues (Egipte, Grècia, Roma) es feia servir un os com a dau en diversos jocs en què intervenia l'atzar (d'aquí prové un joc tradicional: les tabes). Però fins i tot restes arqueològiques de fa més de 40.000 anys s'han interpretat com elements de jocs d'atzar.

A Grècia i Roma es practicaven amb autèntica passió. Homer (900 a. C.) relata que quan Patrocle era petit, es va enfadar tant amb un contrincant, jugant amb l'astràgal, que gairebé el va matar.



- Va ser Girolamo Cardano (1501-1576) qui, en 1565, va escriure la primera obra important relacionada amb el càlcul de probabilitats en els jocs d'atzar. Era el *Llibre dels jocs d'atzar*.
- Jacob Bernoulli (1654-1705), Abraham de Moivre (1667-1754), el reverend Thomas Bayes (1702-1761) i Joseph Lagrange (1736-1813) desenvoluparen fórmules i tècniques per al càlcul de la probabilitat. En el segle XIX, Pierre Simon, marquès de Laplace (1749-1827), va unificar totes aquestes primeres idees i establí la primera teoria general de la probabilitat.
- La probabilitat ha continuat evolucionant amb matemàtics com Poisson (1781-1840), P. Chebyshev (1821-1894), Émile Borel (1871-1956), A. Markov (1856-1922), i creant escola per tal de superar estancaments; Andrei N. Kolmogorov de l'escola russa, (1903-1987), Norbert Wiener (1894-1964) de l'americana. En l'actualitat, estadística i probabilitat s'uneixen i es desenvolupen conjuntament.

OBRIR I GUANYAR

BURRO

BÉ!!

BURRO

1. Tries una porta amb un burro 2. Obren una porta que té darrera un burro.
 3. Et quedes amb la primera opció o la canvies?

COTXE te le quedes → guanyes un **COTXE**
 la canvies → guanyes un **BURRO**

BURRO te le quedes → guanyes un **BURRO**
 la canvies → guanyes un **COTXE**

BURRO te le quedes → guanyes un **BURRO**
 la canvies → guanyes un **COTXE**

Aquest problema, anomenat de **Monty Hall** està inspirat en el concurs televisiu d'EEUU *"Let's Make a Deal"* (*Fem un tracte*), que va ser molt popular entre 1963 i 1986. El seu nom prové del seu presentador, Monty Hall.

Si hi has jugat prou vegades hauràs comprovat, potser amb sorpresa, que la probabilitat de guanyar un cotxe canviant la primera elecció, és superior a la probabilitat de guanyar-lo sense canviar de porta.

Si observes el diagrama d'arbre o si apliques el que ja saps sobre probabilitat condicionada veuràs que:

- **$P(\text{cotxe/amb canvi}) = 2/3$**
- **$P(\text{cotxe/sense canvi}) = 1/3$**

Probabilitat



Recorda el més important

Experiments aleatoris

No es pot predir el resultat, encara que hàgim experimentat molt.

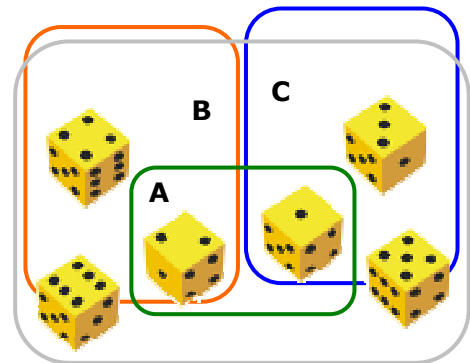


Per exemple, tirar un dau.

- Espai **mostral** $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Esdeveniments **elementals**: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ i $\{6\}$
- Altres **esdeveniments**: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 3, 5\}$
- Esdeveniment **segur**: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Esdeveniment **impossible**: $\emptyset = \{ \}$
- Esdeveniment **contrari** de A : $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$

Esdeveniments **compatibles**: Són els que es poden verificar a la vegada, com A i B o A i C .

Esdeveniments **incompatibles**: Si no es poden verificar a la vegada, com parell i senar, B i C .



Operacions amb esdeveniments

Unió: $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$

Intersecció: $A \cap B = \{2\}$

Diferència: $A - B = \{1\}$

Probabilitat d'esdeveniments

$P(\text{Esdeveniment segur}) = P(E) = 1$

$P(\text{Esdeveniment impossible}) = P(\emptyset) = 0$

$0 \leq P(\text{esdeveniment}) \leq 1$

Probabilitat de la unió:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A i B són incompatibles.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ A i B compatibles.

Regla de Laplace

Quan els esdeveniments elementals són equiprobables:

$$P = \frac{\text{nre. casos favorables}}{\text{nre. casos possibles}}$$

Si l'experiment no és regular acudim a l'experimentació, i es pren la probabilitat de A com la seva freqüència relativa en repetir l'experiment molts cops.

Experiments compostos

Estan formats per diversos experiments simples realitzats de manera consecutiva. Per calcular la probabilitat es multipliquen les dels esdeveniments simples que el formen.

En esdeveniments consecutius es poden produir dues situacions:

1) **Independents**, no influeixen en l'altre.

Com en les extraccions amb devolució.

2) **Dependents**, cada esdeveniment està condicionat per l'anterior.

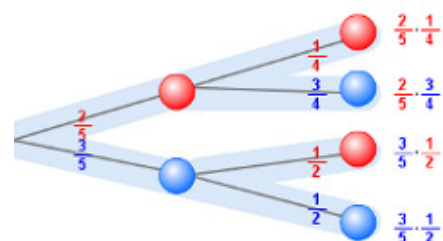
Com en les extraccions sense devolució.

Amb un diagrama d'arbre és fàcil calcular la probabilitat d'un experiment compost:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Probabilitat condicionada

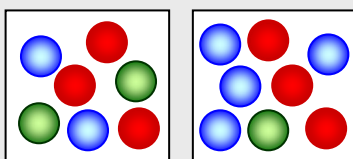
$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Autoavaluació



1. Escrivim cadascuna de les lletres de la paraula ENSENYAMENT en un paper i en traiem una a l'atzar. Escriu l'esdeveniment "sortir vocal"
2. Una moneda està trucada de manera que la probabilitat de sortir creu és doble que la probabilitat de sortir cara. Calcula la probabilitat de sortir cara.
3. En una bossa hi ha 100 boles numerades del 0 al 99. S'extreu una bola. Calcula la probabilitat que entre les seves xifres no hi hagi el 9.
4. Es tria una fitxa de dòmino, considera els esdeveniments A ="Sortir una fitxa doble", B ="La suma dels punts és múltiple de 4". Quina és la probabilitat de $A \cup B$?
5. Si A i B són dos esdeveniments tals que $P(A)=0,42$, $P(B)=0,30$ i $P(A \cap B)=0,12$, calcula la probabilitat que no passi ni A ni B .
6. Llancem una moneda i un dau. Calcula la probabilitat que surti "cara" i "nombre senar"
7. Tenim dues urnes amb boles roges, verdes i blaves, com en la figura. Traiem una bola de cada urna. Calcula la probabilitat que les dues boles siguin roges.
8. Els resultats d'un examen realitzat per dos grups de 4t d'ESO es mostren en la taula de l'esquerra. Es tria un estudiant a l'atzar. Calcula la probabilitat que sigui del grup A si ha aprovat.
9. Dins un calaix tinc 6 mitjons de color blanc i 14 de color negre. Si agafo dos mitjons sense mirar, quina probabilitat hi ha que siguin del mateix color?
10. Es treuen dues cartes d'una baralla de 40, una rere l'altra. Si l'extracció es fa amb reposició, calcula la probabilitat que una sigui copes i l'altra bastos.



	aproven	suspenen
4tA	14	7
4tB	15	14

Solucions dels exercicis per practicar

- $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 $B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
 $C = \{1, 2\}$
 $D = \{3, 6, 9, 12\}$
Incompatibles B i C, C i D
- $A = \{2-6, 3-5, 3-6, 4-4, 4-5, 4-6, 5-5, 5-6, 6-6\}$
 $B = \{0-5, 1-4, 2-3, 4-6, 5-5\}$
 $A \cap B = \{4-6, 5-5\}$
 $A \cap \bar{B} = \{2-6, 3-5, 3-6, 4-4, 4-5, 5-6, 6-6\}$
- $A \cap B = \{10C, 11C, 12C\}$
 $\bar{A} \cap B = \{1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 7C\}$
- $A \cup B = B$
 $A \cap B = A$
 $\bar{B} = \{CCCC, CCCX, CCXC, CXCC, XCCC\}$
- $4/21 = 0,19$
- $9/27 = 1/3$
- En la segona (2/7)
- a) 13/30 b) 9/30
- 9/38
- $27/36 = 0,75$
- 0,85
- $P(1) = P(3) = P(5) = 3/12$
 $P(2) = P(4) = P(6) = 1/12$
 $P(\text{senar}) = 3 \cdot 3/12 = 9/12$
- $P(\text{ni A ni B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,40 = 0,60$
- $P(A - B) = 0,14$
 $P(B - A) = 0,49$
- $P(\text{vermella}) \approx 0,32$
5 blanques, 7 vermelles, 11 negres.
- a) 17/49 b) 10/42
- 16/49
- 22/72
- a) 9/39 b) 5/78
- 0,84
- a) 2/90 b) 4/15
- a) $P(D \cap F) = 26/320$
b) $P(D/F) = 26/45$
- a) $3 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,384$
b) $0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008$

Solucions AUTOAVALUACIÓ

- {A, E}
- 1/3
- $481/100 = 0,81$
- 11/28
- $1 - 0,60 = 0,40$
- $1/4 = 0,25$
- 9/56
- 14/29
- 53/95
- 1/8

No oblidis lliurar les activitats al tutor ►