

Helburuak

Hamabostaldi honetan, hau ikasiko duzu:

- Zirkunferentzian eta zirkuluan agertzen diren elementuak identifikatzen.
- Puntu, zuzen eta zirkunferentzien posizio erlatiboak ezagutzen.
- Zirkunferentzian eraikitako angeluen propietateak ezagutzen.
- Irudi zirkularren luzerak eta azalerak neurtzen.

Hasi baino lehen

1. Zirkunferentzia 158. orr.
Zirkunferentzia
Zirkunferentziaren elementuak
2. Posizio erlatiboak 160. orr.
Puntua eta zirkunferentzia
Zuzena eta zirkunferentzia
Bi zirkunferentzia
3. Angeluak zirkunferentzian 163. orr.
Angelu zentrala
Angelu inskribatua
Zirkunferentzierdian inskribaturiko angelua
4. Zirkulua eta irudi zirkularrak 165. orr.
Zirkulua
Irudi zirkularrak
Luzerak zirkunferentzian
Azalerak zirkuluan

Praktikatzeko ariketak

Gehiago jakiteko

Laburpena

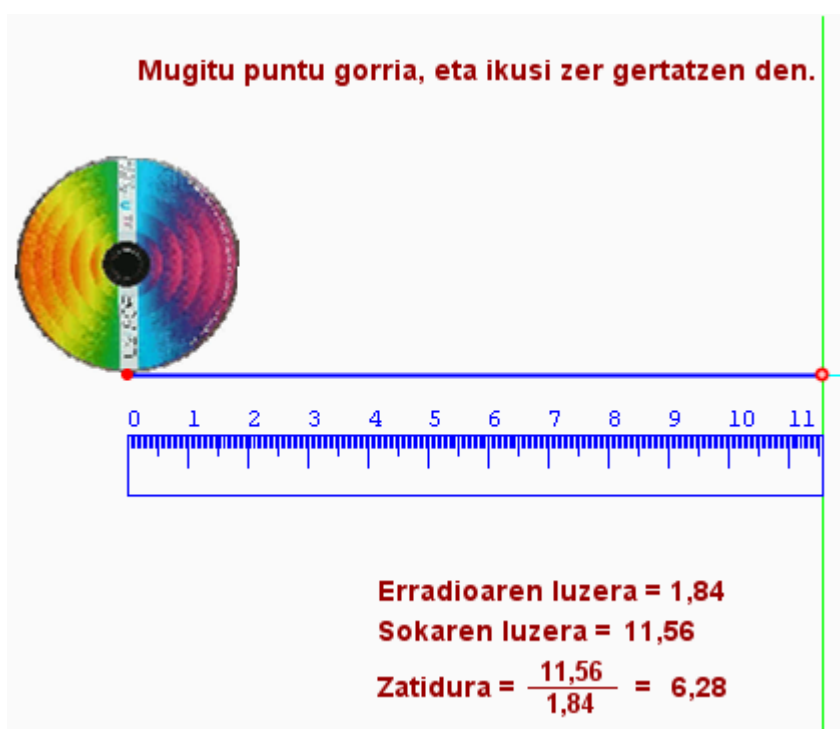
Autoebaluazioa

Tutoreari bidaltzeko jarduerak

Hasi baino lehen

Ikertu

Moztu kartoizko zirkulu bat, eta neurtu zentrotik zirkunferentziarainoko distantzia. Biribilkatu soka zati bat zirkuluaren inguruan. Ondoren, luzatu soka, eta neurtu. Zatitu sokaren luzera zentrotik ertzerainoko distantziarekin, eta idatzi emaitza. Errepikatu prozedura tamaina desberdinetako zirkuluekin. Zein da atera duzun ondorioa?



Goiko irudiko diskoak soka bat du birbilkatuta inguruan. Soka luzatuta (irudian, urdinez ageri da), haren luzera neurtuko dugu. Adibidean, sokaren luzera 11,56 cm da.

Zirkuluaren erradioa 1,84 cm-koa da. Sokaren luzeraren eta erradioaren arteko zatidura 6,28 da.

Orainarte ikusitakoarekin, badirudi ezer berezirik ez dagoela. Baina badago gauza berezi bat: beste objektu biribil batekin esperimentu bera egiten badugu, zatidura berbera lortuko dugu!

Beraz, zatidura honek oinarritzko erlazio bat izan behar du zirkuluaren geometriarekin.

Zirkunferentzia eta zirkulua

1. Zirkunferentzia

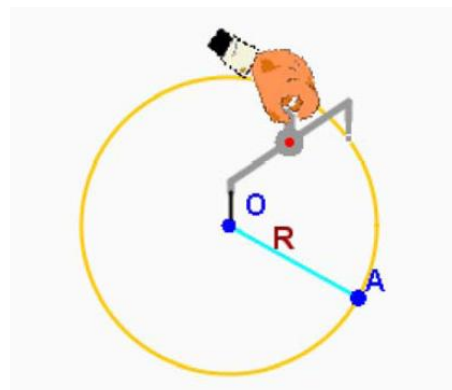
Zirkunferentzia.

Markatu O puntu bat planoan. Orain, markatu A beste puntu bat, eta kalkulatu O-ren eta A-ren arteko distantzia. O puntutik distantzia berdina dauden planoko puntu guztiek irudi lau bat osatzen dute: **zirkunferentzia**.

Zirkunferentzia da lerro lau eta itxi bat, non puntu guztiak **distantzia berdina** dauden O puntu jakin batetik.

O puntua zirkunferentziaren **zentroa** da; eta **erradioa**, zentrotik zirkunferentziako edozein puntutara dagoen distantzia.

Zirkunferentzia da lerro lau eta itxi bat, non puntu guztiak **distantzia berdina** dauden O puntu jakin batetik.



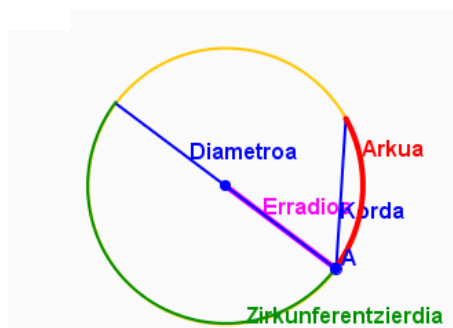
Kompasa da erreminta bat zirkunferentziak eta zirkulua marrazteko erabiltzen dena.

Zirkunferentzia marrazteko, ireki konpasa, jarri haren orratza puntu batean, eta biratu. Konpasaren irekidura izango da zirkunferentziaren **erradioa**.

Zirkunferentziaren elementuak.

Zirkunferentzia batean, elementu hauek bereiz ditzakegu:

- **Zentroa**: zirkunferentziako puntu guztietatik distantzia berberera dagoen puntua (jakina, zirkunferentziaren barnean dago).
- **Erradioa**: zirkunferentziaren edozein puntu eta zentroa lotzen dituen zuzenkia.
- **Korda**: zirkunferentziaren bi puntu (edozeintzuk) lotzen dituen zuzenkia.
- **Diametroa**: zentrotik pasatzen den korda.
- **Arkua**: zirkunferentziaren bi punturen arteko zirkunferentzia zatia, bi puntu horiek edozein direla.
- **Zirkunferentzierdia**: zirkunferentziaren erdia hartzen duen arkua.



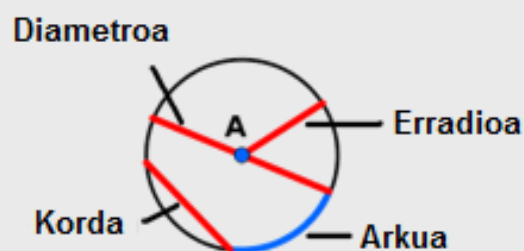
Marraztu zentroa O puntuan eta $R = 1,5$ erradioa dituen zirkunferentzia.

Diametroaren **luzera** erradioaren **bikoitza** da.

ARIKETA ebatziak

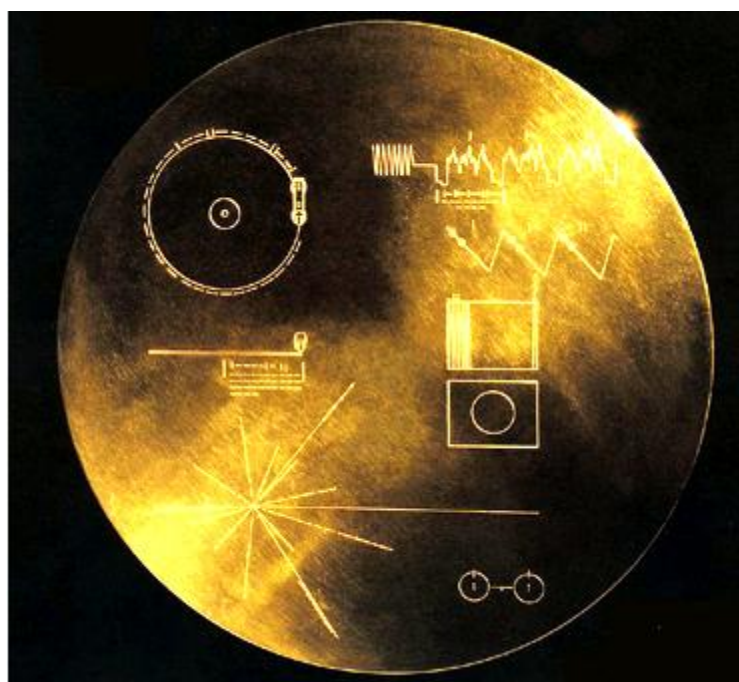
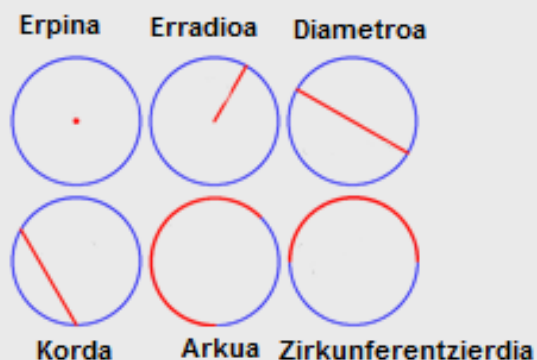
1. Marraztu zentroa A puntuan eta 3 cm-ko erradioa dituen zirkunferentzia. Marraztu zirkunferentziaren elementu hauek: erradioa, diametroa, korda bat eta arku bat.

Erantzuna: Erabili marrazketarako tresnak, eta lortu honelako irudi bat:



2. Izendatu irudian gorriz ageri diren elementuak.

Erantzuna:



Zirkunferentzia eta zirkulua

2. Posizio erlatiboak

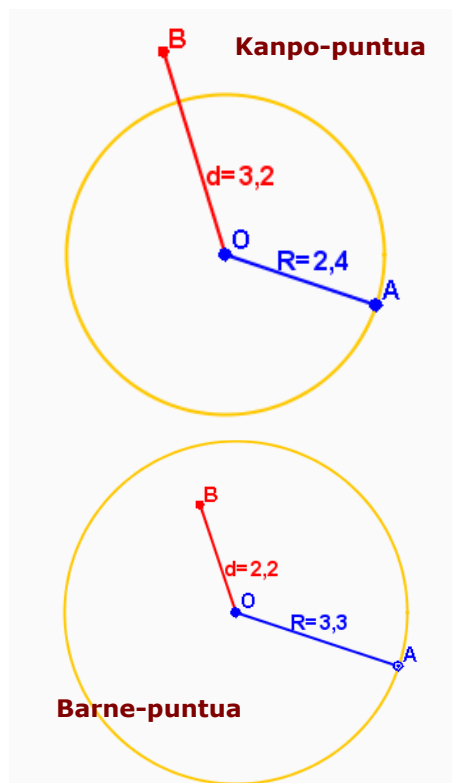
Puntua eta zirkunferentzia.

Puntu bat eta zirkunferentzia bat ditugunean, hainbat egoerarekin aurki gaitezke. Egoera horiei **posizio erlatiboak** esaten zaie.

Puntu bat zirkunferentziaren **kanpo-puntua** dela esaten da zentrotik erradioa baino distantzia **handiagoa** dagoenean: **zirkunferentziatik kanpo** dago puntua. Puntu bat zirkunferentziaren **barne-puntua** dela esaten da zentrotik erradioa baino distantzia **txikiagoa** dagoenean: **zirkunferentziaren barnean** dago puntua.

Puntu bat **zirkunferentziarena** dela esaten da zirkunferentzian bertan dagoenean. Hala gertatzen denean, erradioa da puntutik zentrorainoko distantzia.

Zirkunferentziarena ez den puntua **barne-** edo **kanpo-puntua** da.



Zuzena eta zirkunferentzia.

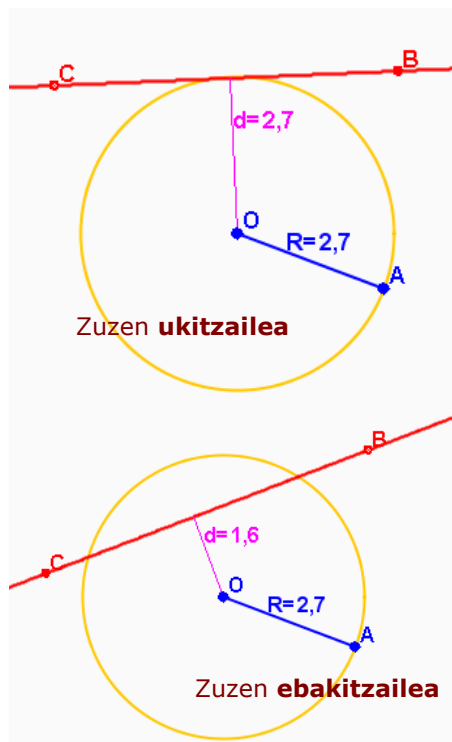
Puntuarekin egin dugun moduan, zuzen baten eta zirkunferentzia baten arteko posizio erlatiboak azter ditzakegu. Honako kasu hauek aurki ditzakegu:

Zuzena **kanpoko** dela esaten da zuzenak eta zirkunferentziak ez dutenean puntu komunik.

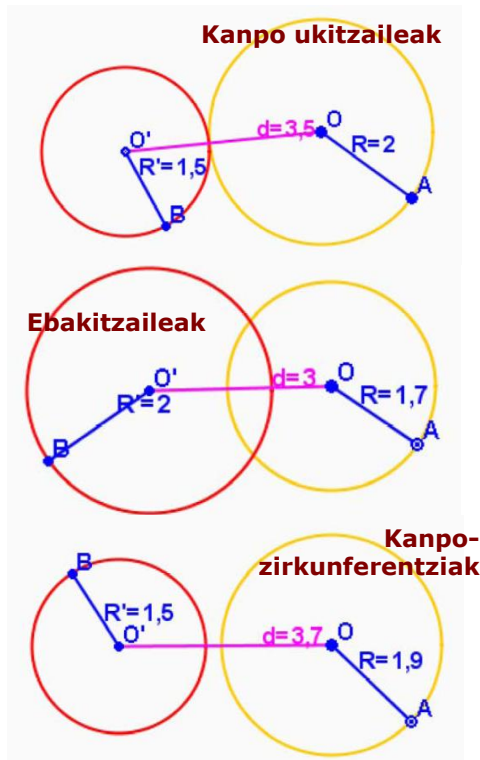
Komunean puntu bakarra dutenean, zuzena eta zirkunferentzia **ukitzaileak** dira. Kasu horretan, **perpendikularrak** dira zuzena eta erradioa.

Komunean bi puntu dituztenean, zuzena eta zirkunferentzia **ebakitzaileak** dira.

Ukitzailea da zirkunferentziarekin puntu komun bakarra duen zuzena.



Zirkunferentzia eta zirkulua



Bi zirkunferentzia.

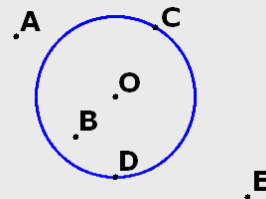
Bi zirkunferentziaren arteko posizio erlatiboak:

- **Kanpokoak:** zirkunferentzia baten puntu guztiak dira bestearen kanpo-puntuak.
- **Barnekoa:** Zirkunferentzia baten puntu guztiak dira bestearen barne-puntuak; zentro berbera badute, zirkunferentziak **zentrokideak** dira.
- **Ukitzaileak:** puntu bat bakarrik dute komunean zirkunferentziek; **barne-** edo **kanpo-ukitzaileak** izango dira komunak ez diren puntuen kokapenaren arabera.
- **Ebakitzaileak:** **bi puntu** dituzte **komunean**, eta zirkunferentzia bakoitzak bi arku bereiziz zatitzen du bestea.

ARIKETA ebatziak

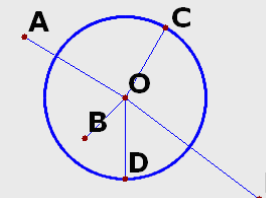
3. Puntu hauek emanda, adierazi barne-puntuak, kanpo-puntuak edo zirkunferentziarenak diren:

Erantzuna: A eta E kanpo-puntuak dira; O eta B barne-puntuak, eta C eta D zirkunferentziarenak.



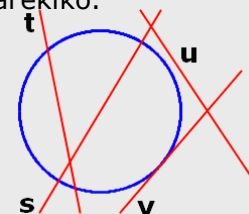
4. Puntu hauetatik, zeintzuk daude zentrotik distantzia berdina? Zeintzuk zentrotik erradioa baino distantzia handiagoa? Zeintzuk zentrotik erradioa baino distantzia txikiagoa? Eta zeintzuk erradioaren bikoitza den distantziara dago?

Erantzuna: C eta D puntuak O zentrotik distantzia berdina daude; A eta E zentrotik erradioa baino distantzia handiagoa daude; B zentrotik erradioa baino distantzia txikiagoa dago; E erradioaren bikoitza den distantziara dago.

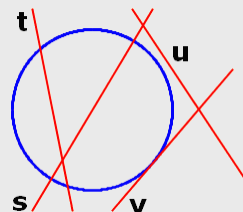


5. Adierazi irudiko zuzenen posizio erlatiboa zirkunferentziarekiko.

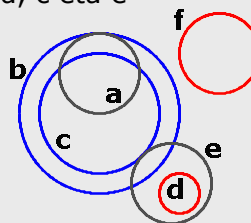
Erantzuna: t eta s zuzenak ebakitzaileak dira; u kanpokoak da; eta v ukitzailea.



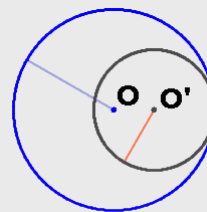
- Erantzuna: u zuzenetik zentrora dagoen distantzia erradioa baino handiagoa da; t-tik zentrora dagoen distantzia erradioa baino txikiagoa da; v-tik zentrora dagoen distantzia erradioaren luzera da; s-tik zentrora dagoen distantzia nulua da.



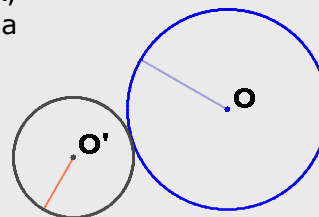
- Erantzuna a eta b zirkunferentziak barne-
ukitzaileak dira; a eta c ebakitzailak; b
eta c barrukoak eta zentrokideak; c eta f
kanpokoak; e eta d barrukoak; e eta b
ebakitzailak; a eta d kanpokoak; c eta e
kanpo-ukitzaileak.



- Erantzuna: Zentroen arteko distantzia 2 cm-koa da.



- Erantzuna: Zentroen arteko distantzia 8 cm-koa da.



- Erantzuna: Kanpoko-zirkunferentziak dira.

3. Angeluak zirkunferentzian

Angelu zentrala.

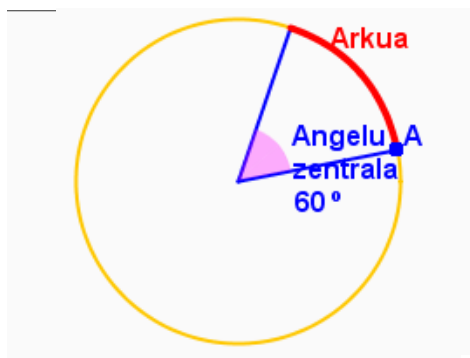
Angelu zentrala da **erpina** zirkunferentziaren **zentroan** duen angelua.

Zirkunferentzia bi puntutan ebakitzen dute angelu zentralak, eta bi puntu horiek arku bat mugatzen dute.

360°-ko angeluak zirkunferentzia osoa hartzen du; 180°-ko angeluak bi arku berdinetan banatzen du; eta angelu zuzenak zirkunferentzierdiaren erdia den arkua hartzen du.

Horrela, **angelu zentral** bakoitza dagokion **arkuarekin** identifika dezakegu.

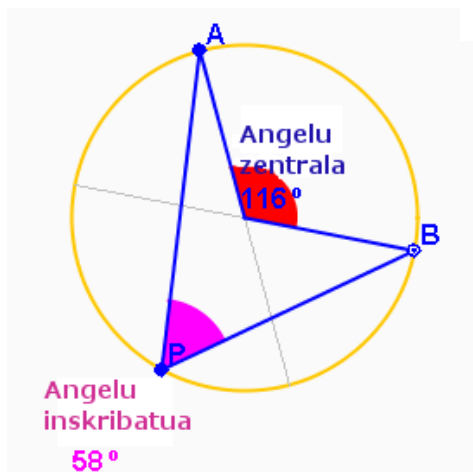
Angelu zentral guztiek **arku** bat mugatzen dute zirkunferentzian.



Goiko irudiko arku gorriari dagokion angelu zentrala.

Angelu zentralaren eta haren zirkunferentzia-arkuaren arteko elkarrekotasuna zehaztu daiteke; baita alderantziz ere, edozein arku eta bere angelu zentralaren artekoa.

Horregatik, **arkuaren zabalera** hitz egin dezakegu; kasu honetan, 140°-koa da.



P puntuan erpina duen angelu inskribatua AOB angelu zentralaren erdia da.

Beraz, P puntua zirkunferentzian zehar mugitzen badugu, APB angeluak beti izango du zabalera berbera kasu guztietan izango baita angelu zentralaren erdia.

Angelu inskribatua.

Inskribaturiko angelua da erpina zirkunferentzian duen angelua, eta bere aldeak zirkunferentziarekiko **ebakitzailerak** dituenak.

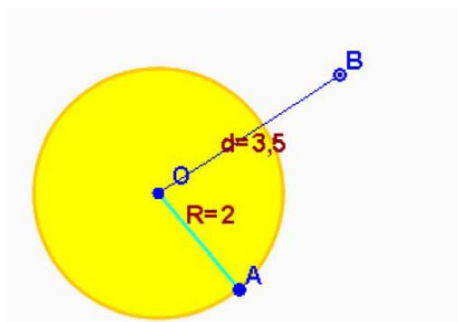
APB angelu inskribatuaren aldeek A eta B puntuetan ebakitzen dute zirkunferentzia. Bi puntu horiek AOB angelu zentrala zehazten dute. Bada, AOB angelu zentrala beti da APB angelu inskribatua halako bi zabalagoa.

Beraz, **angelu inskribatua** beti da dagokion angelu **zentralaren erdia**.

Angelu inskribatuaren zabalera beti da dagokion angelu zentralaren **erdia**.

4. Zirkulua eta irudi zirkularrak

Zirkulua.



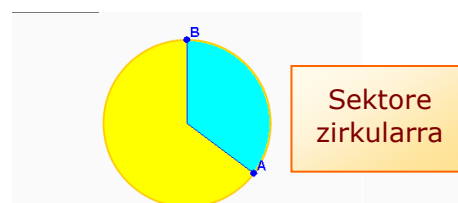
Zentrotik erradioa baino distantzia handiagoa badago, puntua kanpo-puntua izango da.

Zirkulua da zirkunferentziak inguratzen duen eremu laua. Modu zehatzago batean esanda: eremu lau bat da O zirkunferentziaren zentroko zirkulua, O-tik **erradioa baino distantzia txikiagora edo berdiner**a dauden puntuak biltzen dituen.

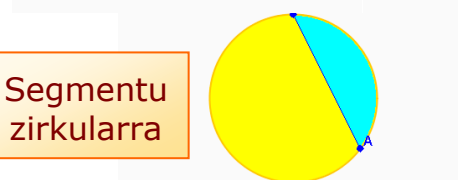
Zirkuluak, beraz, bai zirkunferentziaren barne-puntuak bai zirkunferentziaren beraren puntuak ere biltzen ditu. Zirkunferentzia da zirkuluaren "**muga**".

Zirkuluaren zentroa, erradioa eta diametroa defini daitezke: zirkunferentziaren zentroa, erradioa eta diametroa dira.

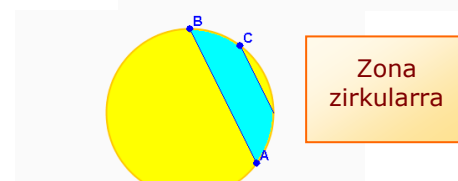
Zirkunferentziaren **barne-puntuak eta zirkunferentziarenak** biltzen ditu **zirkuluak**.



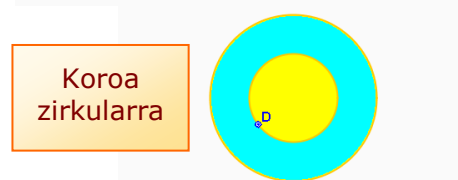
Sektore zirkularra



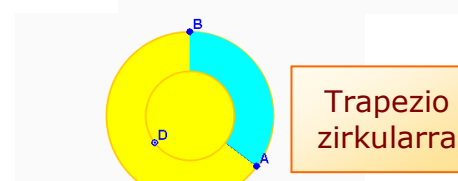
Segmentu zirkularra



Zona zirkularra



Koroa zirkularra



Trapezio zirkularra

Irudi zirkularrak.

Hainbat **irudi zirkular** osatzen dituzte erradioek, kordek eta zirkunferentzia zentrokideek.

Sektore zirkularra da bi erradiok mugatzen duten eremua.

Segmentu zirkularra da korda batek mugatzen duen zirkuluaren eremua. **Zona zirkularra** da bi korda paralelok mugatzen duten eremua.

Koroa zirkularra da bi zirkunferentzia zentrokidek mugatzen duten eremua. Koroa zirkular bat bi erradiorekin ebakitzen badugu, sortzen den eremua **trapezio zirkularra** da.

Hainbat **irudi zirkular** osatzen dituzte erradioek, kordek eta zirkunferentzia zentrokideek.

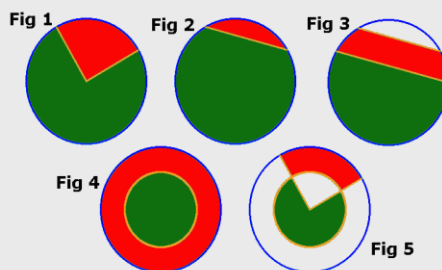
Zirkunferentzia eta zirkulua

ARIKETA ebatziak

16. Zein izen dute beheko irudietan gorri eta berde adierazitako elementuek?

Erantzuna:

1. irudia berdea sektore zirkularra
gorria sektore zirkularra
2. irudia berdea segmentu zirkularra
gorria segmentu zirkularra
3. irudia berdea segmentu zirkularra
gorria zona zirkularra
4. irudia berdea zirkulua
gorria koroa zirkularra
5. irudia berdea sektore zirkularra
gorria trapezio zirkularra



Objektu askotan aurki ditzakegu sektore zirkularrak, koroak, zirkunferentzierdiak eta beste irudi edo elementu zirkularrak.



Zirkunferentziaren luzerak.

Edozein zirkunferentziaren luzera diametroarekin zatitzen badugu, hiru baino apur bat handiagoa den balio finko bat lortuko dugu: **3,1415926...** Zenbaki hori **π (pi)** letra grekoarekin izendatzen da, eta infinitu zifra hamartar ez periodiko ditu.

L zirkunferentziaren luzera (edo perimetroa) eta D diametroa badira, hau betetzen da: $L = \pi D$. Erradioaren bikoitza da diametroa; beraz:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot R$$

Eman dezagun zirkunferentzia arku batek n graduko zabalera duela. Arkuaren luzera kalkulatzeko, kontuan izango dugu $2\pi R$ perimetroari 360° dagozkiola, eta **proportzionaltasun zuzeneko** erlazio batekin ari garenez, hau beteko da:

$$L_{arkua} = \frac{n \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{360}$$



ADIBIDEA

223° -ko arkuaren L_{arkua} luzera neurtzeko, proportzio hau idatziko dugu:

$$\begin{aligned} L_{arkua} &\rightarrow 223^\circ \\ L_{zirkunf} &\rightarrow 360^\circ \end{aligned} \quad \text{Beraz,}$$

$$\frac{L_{arkua}}{L_{zirkunf}} = \frac{223^\circ}{360^\circ}$$

$$\text{Arkuaren luzera: } L_{arkua} = \frac{223^\circ}{360^\circ} \cdot L_{zirkunf}$$

Zirkunferentziaren luzera $L_{zirkunf} = 2 \cdot \pi \cdot 2,58$ da; beraz, erraz ezagutu dezakegu bilatzen ari garen arkuaren luzera.

ARIKETA ebatziak

17. Kalkulatu 20 cm-ko erradioa duen zirkunferentziaren luzera.

Erantzuna: Luzera: $L = 2 \cdot \pi \cdot 20 = 125,66$ cm.

18. Lehen zirkunferentziaren diametroa 30 cm-koa da, eta bigarrenaren erradioa 15 cm-koa. Kalkulatu zirkunferentzia bien luzera.

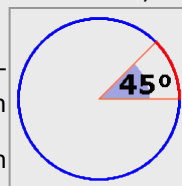
Erantzuna: Bi zirkunferentziak berdinak dira: lehenaren erradioa da bigarren zirkunferentziaren diametroaren erdia: 15 cm. Biek dute erradio berdina; beraz, luzera berdina izango dute: $L = 2 \cdot \pi \cdot 15 = 94,25$ cm.

19. Zirkunferentziaren erradioa 3 cm-koa da. Kalkulatu zirkunferentziaren luzera; baita arku gorriarena eta urdinarena ere.

Erantzuna: Zirkunferentziaren luzera: $L = 2 \cdot \pi \cdot 3 = 18,85$ cm. 45° -ko angelua zirkunferentziaren zortzirena da; beraz, arku gorriaren

luzera: $L_{\text{arkugorria}} = \frac{18,85}{8} = 2,36$ cm. Arku urdina aurreko balioen

kendura da: $L_{\text{arkuurdina}} = 18,85 - 2,36 = 16,49$ cm.



20. Zirkunferentziaren erradioa 1 cm-koa da. Kalkulatu 180° -ko arkuaren luzera. Baita 30° -ko, 90° -ko eta 270° -ko arkuen luzerak ere.

Erantzuna: Zirkunferentziaren luzera: $L = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2 \cdot \pi$; angelua laua da (180°); beraz, arkuak zirkunferentziaz $L_{\text{zirkunferentzia}} = \pi = 3,14$. 30° -ko, 90° -ko eta 270° -ko arkuak zirkunferentziaren hamabirena, laurdena eta hiru laurdenak dira; beraz:

$$L_{30^\circ \text{arkua}} = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot \pi = 0,52, \quad L_{90^\circ \text{arkua}} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi = 1,57, \quad L_{270^\circ \text{arkua}} = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \pi = 4,71.$$

21. Kalkulatu 25,13 cm-ko luzera duen zirkunferentziaren erradioa.

Erantzuna: Erradioa: $R = \frac{25,13}{2 \cdot \pi} = 4$ cm.

22. Zirkunferentzia batean, 60° -ko angeluari 10 cm-ko arkuak dagokio. Zein da zirkunferentziaren erradioa? Eta zein izango litzateke erradioa 203° -ko angeluari 15 cm-ko arkuak balegokio?

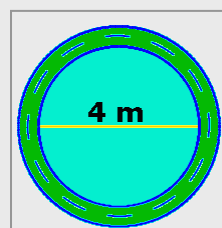
Erantzuna: Zirkuluaren seirena 60° -ko angelua da, eta luzera, zirkunferentzia osoaren seirena: Arkuaren luzera 10 cm-koa da. Erradioa: $R = \frac{10}{\frac{60}{360} \cdot 2 \cdot \pi} = 9,55$ cm. 203° -ko

arkuaren kasuan, $L_{\text{arkua}} = \frac{n}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$; beraz, $15 = \frac{203}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$ eta R askatuz:

$$R = \frac{360 \cdot 15}{2 \cdot \pi \cdot 203} = 4,23 \text{ cm.}$$

23. Igerileku zirkular baten diametroa 4 m-koa da. 1m-ko zabalera duen bide batek inguratzen du igerilekua. Zer luzera du bideak, luzera hori bidearen erditik neurtzen badugu?

Erantzuna: Bidearen zabalera 1 m-koa da, eta erditik neurtuta: $2 + 0,5 = 2,5$ m-ko erradioko zirkunferentzia izango dugu; beraz, bidearen luzera: $L = 2 \cdot \pi \cdot 2,5 = 15,71$ cm.



Zirkunferentzia eta zirkulua

Azalerak zirkuluan.

✓ **Zirkulua** alde "asko"tako poligono erregulartzat har dezakegu; poligonoaren apotema zirkuluaren erradioa da.

Poligono erregularraren azalera =

$$\frac{\text{Perimetroa} \cdot \text{apotema}}{2}$$

$$\text{edo: } \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot R}{2} = \pi \cdot R^2$$

Horrela, zirkuluaren azalera kalkulatzeko formula lortuko dugu:

$$\text{Azalera} = \pi \cdot R^2$$

✓ Eman dezagun n graduko sektore zirkularra. Haren azalera kalkulatzeko, kontuan hartuko dugu proportzionaltasun zuzeneko erlazio dela:

$$A_{\text{sektorea}} = \frac{n \cdot \pi \cdot R^2}{360}$$

ADIBIDEA

2,5 cm-ko erradioko zirkuluan, 126° -ko sektorearen azalera kalkulatzeko, proportzionaltasun hau idatziko dugu:

$$\frac{A_{\text{sektorea}}}{A_{\text{zirk}}} \rightarrow \frac{126^\circ}{360^\circ} \quad \text{Beraz, } \frac{A_{\text{sektorea}}}{A_{\text{zirk}}} = \frac{126^\circ}{360^\circ}$$

$$\text{eta sektorearen azalera: } A_{\text{sektorea}} = \frac{126^\circ}{360^\circ} \cdot A_{\text{zirk}}$$

Zirkuluaren azalera $A_{\text{zirk}} = \pi \cdot 2,5^2$ denez, gure sektorearen azalera erraz kalkula dezakegu.

✓ Koroa zirkularraren azalera kalkulatzeko, zirkulu handiaren azalera ken txikiaren azalera egingo dugu :

$$A_{\text{koroa}} = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

Koroaren erradio handia eta txikia dira R eta r .

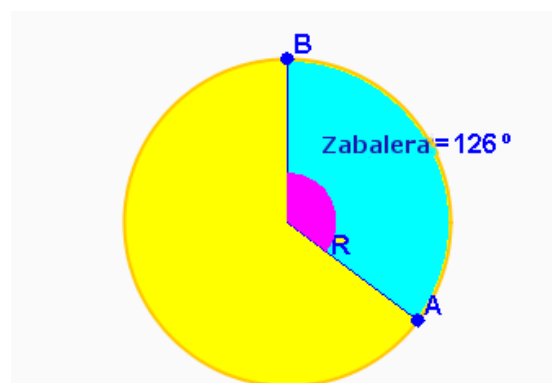
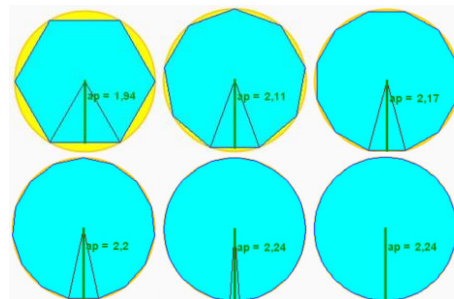
ADIBIDEA

Koroaren erradio handia 3,5 cm-koa da, eta erradio txikia 1,75 cm-koa. Koroaren azalera kalkulatzeko, zirkunferentzia bien azalerak kalkulatu ditugu:

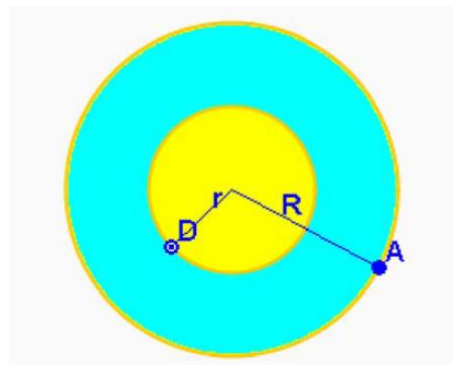
$$A_{\text{handia}} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 3,5^2 \quad \text{eta} \quad A_{\text{txikia}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1,75^2$$

Bien kendura izango da koroaren azalera:

$$A_{\text{koroa}} = \pi \cdot 3,5^2 - \pi \cdot 1,75^2 = \pi \cdot (3,5^2 - 1,75^2) = 28,86$$



$$A_{\text{sektorea}} = \frac{126 \cdot \pi \cdot 2,5^2}{360} = 27,74 \text{ cm}^2$$



$$A_{\text{koroa}} = \pi \cdot (3,5^2 - 1,75^2) = 28,86 \text{ cm}^2$$

ARIKETA ebatziak

24. Kalkulatu 5 cm-ko erradioa duen zirkuluaren azalera.

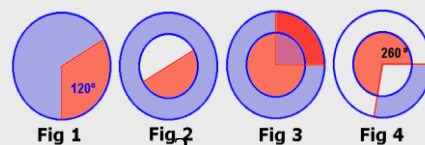
Erantzuna: Azalera: $A = \pi \cdot 5^2 = 78,54 \text{ cm}^2$.

25. Kalkulatu 10 cm-ko eta 20 cm-ko diametroak dituzten zirkunferentzien azalerak.

Erantzuna: Azalerak: $A_1 = \pi \cdot 5^2 = 78,54$ eta $A_2 = \pi \cdot 10^2 = 314,16 \text{ cm}^2$. Kontuz: zirkunferentzia baten erradioa besteren bikoitza bada, azalera ez da bikoitza izango laukoitza baizik.

26. Kalkulatu koloreztatutako irudi zirkularren azalerak.

Oharra: kasu guztietan, kanpo-zirkunferentzien erradioa 2 cm-koa da, eta barne-zirkunferentzia 1,2 cm-koa.



Erantzuna: 1.irudia $A_{\text{sektgorria}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 = 4,19 \text{ cm}^2$, $A_{\text{sekturdina}} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 = 8,38 \text{ cm}^2$;

2.irudia $A_{\text{koroa}} = \pi \cdot (2^2 - 1,2^2) = 8,04 \text{ cm}^2$, $A_{\text{zitkerdia}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1,2^2 = 2,26 \text{ cm}^2$;

3.irudia $A_{\text{trapgorria}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (2^2 - 1,2^2) = 2,01 \text{ cm}^2$, $A_{\text{trapurdina}} = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot (2^2 - 1,2^2) = 6,03 \text{ cm}^2$;

$A_{\text{sektoregorria}} = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 1,2^2 = 3,39 \text{ cm}^2$, $A_{\text{sektoreurdina}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1,2^2 = 1,13 \text{ cm}^2$;

4.irudia $A_{\text{sektoregorria}} = \frac{260}{360} \cdot \pi \cdot 1,2^2 = 3,27 \text{ cm}^2$, $A_{\text{trapurdina}} = \frac{100}{360} \cdot \pi \cdot (2^2 - 1,2^2) = 2,23 \text{ cm}^2$.

27. Kalkulatu 25 cm²-ko azalera duen zirkuluaren perimetroa.

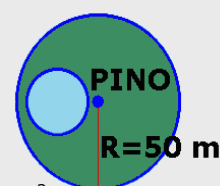
Erantzuna: Erradioa: $R = \sqrt{\frac{25}{\pi}} = 2,82$ eta perimetroa: $L = 2 \cdot \pi \cdot 2,82 = 17,72 \text{ cm}$.

28. Igerileku biribil bat eraiki nahi dugu 50 m-ko diametrodun lursail zirkular batean, lursailaren zentroan dagoen pinua bertan utzita. Zein da libre geratuko den lursailaren azalera?

Erantzuna: Igerilekuaren gehieneko diametroa: 50 m.

Lursailaren azalera = $\pi 50^2 = 7850 \text{ m}^2$

Igerilekuaren gehieneko azalera = $\pi 25^2 = 19625 \text{ m}^2$, libre: 5887,5 m²



29. Erlojuaren segundo-orratzak 1,4 cm-ko luzera du. Kalkulatu 20 segundo pasatzean orratzak osatzen duen sektore zirkularren azalera.

Erantzuna: 120°-ko arkua deskribatzen du. Arkua luzera: $L = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 12,57 \text{ cm}$.

30. Erlojuaren minutu-orratzak 4 cm-ko luzera du. Kalkulatu orratzak 3:20 eta 4:00 tartean osatzen duen sektore zirkularren azalera. Kalkulatu denbora tarte horretan 3cm-ko ordu-orratzak osatzen duen sektorearen azalera.

Erantzuna: Minutu-orratzak 240°-ko sektorea osatzen du; sektorearen azalera: de

$A_{\text{min orratzak}} = \frac{240}{360} \pi \cdot 4^2 = 33,51 \text{ cm}^2$. Ordu-orratzak 20° osatzen ditu, eta azalera:

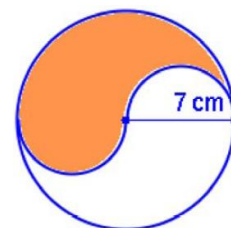
$A_{\text{orduak}} = \frac{20}{360} \pi \cdot 3^2 = 1,57 \text{ cm}^2$.

Zirkunferentzia eta zirkulua



Praktikatzeko

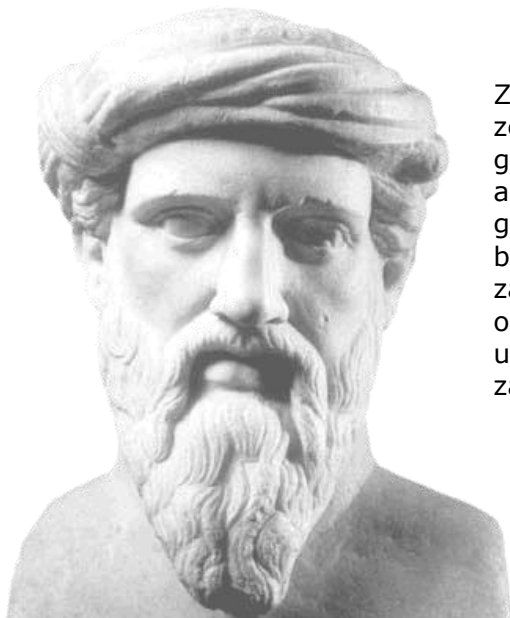
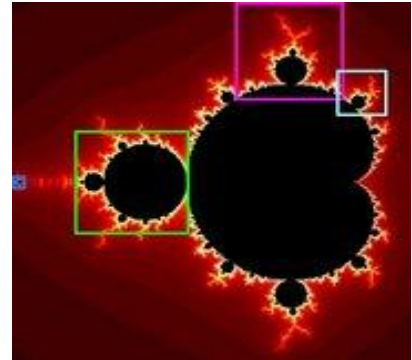
1. 7,6-ko erradioa duen zirkunferentzia batean, zein da zentrotik zirkunferentziaren edozein puntutara dagoen distantzia? Kalkulatu zirkunferentziaren diametroa.
2. 4,6 erradioko zirkunferentzia batean, marratu dezakegu 9,6 luzerako korda bat?
3. Zirkunferentziaren luzera 45 bada, eta arkuarena 25, zenbat gradukoa da arku horri dagokion angelu zentrala?
4. Zuzen bat 8,8-ko erradioa duen zirkunferentzia baten zentrotik 2,8-ko distantziara badago, zein da zirkunferentziarekiko duen posizio erlatiboa?
5. Bi zirkunferentziaren zentroak 9,9-ko distantziara daude, eta zirkunferentzietako batek 2,1-eko erradioa du. Nolakoa izan behar du bigarren zirkunferentziaren erradioak, zirkunferentziok elkarrekiko ukitzaileak izan daitezen?
6. Zirkunferentzia bateko angelu zentrala 160° bada, zein izango da arku bera duen angelu inskribatua?
7. Angelu inskribatua 27° bada, zein da arku bera duen angelu inskribatua? Angelu inskribatua zuzena denean, zer irudi ageri da?
8. Kalkulatu 3,4 erradioa duen zirkunferentziaren luzera, eta erradio bereko zirkuluaren azalera. Kalkulatu 241° -ko zabalera duen arkuaren luzera, eta angelu bereko sektorearen azalera.
9. Koroa zirkular baten kanpo-erradioa 7 da, eta koroaren azalera 125,6. Kalkulatu koroaren barne-erradioa.
10. Bi irudik osatzen dute leiho bat: 1,6 m-ko zabalera eta altuera bikoitza duen laukizuzenak, eta laukizuzenaren gainean dagoen zirkuluerdiak. Kalkulatu leihoaren azalera eta perimetroa.
11. Kalkulatu irudi laranjaen azalera eta perimetroa.





Zenbaki baten garrantzia.

π zenbakia kalkulatzea izan da historiako erronka zientifiko inportanteenetako eta lehenengoetako bat. Geometriaren hasiera-hasieratik, ezaguna zen zirkunferentziaren luzeraren eta diametroaren arteko erlazioa. Luzeraren eta diametroaren zatidura da, hain zuzen ere, π zenbakia, eta Pitagorasen izenetik hartu zuen izena.



Zenbaki misteriotsu horren balio zehatza ezagutzea zen orduko eginkizuna, eta, hala, egiptoarrek eta grekoek hainbat hurbilketa eskaini zizkiguten antzinatean. Hurbilketetako bat $22/7$ zatikia da; geroztik, beste hurbilketa batzuk plazaratu dira, benetako balioari gero eta gehiago hurbildu zaizkionak. Johann Heinrich Lambert suitzarrak ordurako uste orokorra zen hau frogatu zuen, 1768. urtean: π ez da zenbaki arrazionala; beraz, ezin da zatiki moduan adierazi.

Baina historiako zenbakirik ezagunena izan daitekeen hau are bereziagoa da: n ez da zenbaki algebrakoa. Hau da, ez dago batuketa, kenketa, biderketa eta berreketa eragiketekin osatutako ekuaziorik soluziotzat n zenbakia duenik. Ondorio honetara heldu zen Lindemann alemaniarra 1882. urtean. Gaur egun, n zenbakia infinitu zifra hamartar ez periodikoz osatuta dagoela kontuan izanik, zifra horiek kalkulatzeko lanean dabiltza. Dagoeneko, milioika zifra ezagutzen dira. Animatzen bazara..., badakizu!



Zirkunferentzia eta zirkulua



Gogora ezazu garrantzitsuena

Zirkunferentzia eta haren elementuak.

Zirkunferentzia da lerro lau eta itxi bat, non puntu guztiak **distantzia berdiner**a dauden O puntu jakin batetik. Elementu nagusiak:

- **zentroa**
- **erradioa**
- **korda**
- **diametroa**
- **arkua**
- **zirkunferentzierdia**

Puntuen, zuzenen eta zirkunferentzien arteko hainbat **posizio erlatibo** daude.

Angelu inskribatuaren zabalera beti da dagokion angelu zentralarenaren **erdia**.

Beraz, zirkunferentzierdian inskribaturiko angelu guztiak zuzenak dira.

Zirkulua eta haren elementuak. Luzerak eta azalerak.

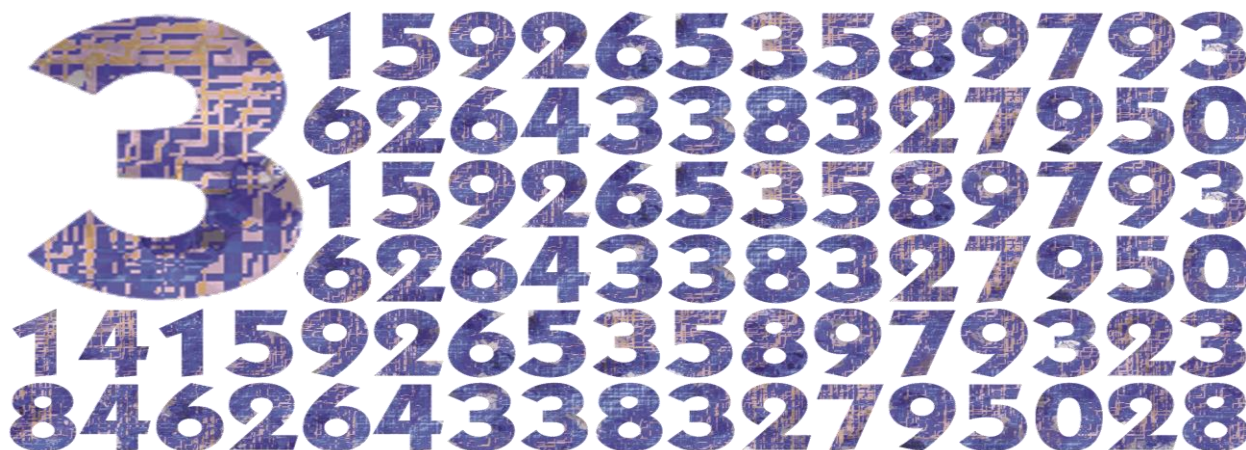
Zirkulua da zirkunferentziak inguratzen duen eremu laua. Zirkunferentziaren **barne-puntuak** eta **zirkunferentziarenak** biltzen ditu **zirkuluak**. Irudi zirkularrak hauek dira:

- **sektore** zirkularra
- **segmentu** zirkularra
- **zona** zirkularra
- **korroa** zirkularra
- **trapezio** zirkularra

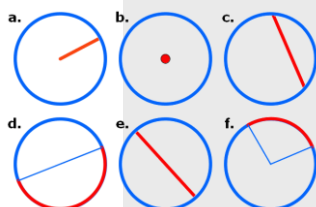
R **erradioa**ren luzera bada, honela kalkula ditzakegu zirkuluaren perimetroa eta azalera:

- perimetroa: $L = 2 \cdot \pi \cdot R$
- azalera: $A = \pi \cdot R^2$

Formula horiekin eta **proportzionaltasun zuzenarekin** **arkuen** luzera eta **sektore**, **korroa** eta **trapezio** zirkularren azalerak kalkulatuko ditugu.



Autoebaluazioa



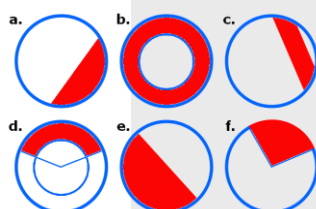
1. Zeintzuk dira ezkerreko irudietan gorriz adierazita ageri diren elementuen izenak?

2. Zein da 6,6-ko erradioa duen zirkunferentzia baten zentrotik 9,2 distantziara dagoen puntuaren posizio erlatiboa?

3. Zein da 7,6-ko erradioa duen zirkunferentzia baten zentrotik 6,8 distantziara dagoen zuzenaren posizio erlatiboa?

4. 5,7 eta 0,9 erradioak dituzten bi zirkunferentziaren zentroen arteko distantzia 4,8 da. Kalkulatu bi zirkunferentzien posizio erlatiboa.

5. Zein izango da zirkunferentzia baten angelu inskribatuaren balioa baldin eta dagokion angelu zentrala 224° -koa bada?



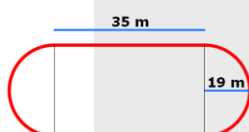
6. Izendatu gorriz margotuta dauden irudi zirkularrak.

7. Zirkunferentzia baten erradioa 9,6 da. Kalkulatu 145° -ko zabalera duen arkuaren luzera.

8. Zirkunferentzia batean, 154° -ko zabalera duen sektore zirkularraren azalera 71,6 da. Kalkulatu zirkunferentziaren erradioa.

9. Lorategi zirkular baten diametroa 7,9 m-koa da. Inguruan, 3 metroko zabalera duen bidea dago. Zein da bidearen azalera?

10. Irudiko zirkuituari 26 bira eman dizkio kirolari batek. Zer distantzia egin du guztira?



Zirkunferentzia eta zirkulua

Praktikatzeko ariketen erantzunak

1. Erradioa: $R = 7,6$. $D = 15,2$.
2. Ezin ditugu marraztu zirkunferentziaren diametroa baino korda luzeagoak. Kasu honetan, kordaren luzera ezin da 9,2 baino handiagoa izan.
3. Luzera angeluarekiko zuzenki proportzionala denez, $\alpha \rightarrow 25$
 $360^\circ \rightarrow 45'$
Beraz, angelu zentrala:
 $\alpha = \frac{25}{45} \cdot 360^\circ = 200^\circ$
4. Distantzia erradioa baino txikiagoa denez, zuzena eta zirkunferentzia ebakitzailerak dira.
5. Bigarrenaren erradioa kendura baino txikiagoa izan behar da: $9,9 - 2,1$; beraz: $R < 7,8$
6. Angelu inskribatua 160° -ren erdia izango da: 80° .
7. Angelu zentralaren zabalera 27° -ren bikoitza izango da: 54° . Angelu inskribatua zuzena denean, angelu zentrala laua da, eta triangelu zuzena ageri da.
8. Luzera: $L = 2 \cdot \pi \cdot 3,4 = 21,36$ eta azalera: $A = \pi \cdot 3,4^2 = 36,32$. Arkuaren luzera: $L_{arkua} = \frac{241}{360} \cdot 21,36 = 14,30$ eta sektorearen azalera:
 $A_{sektorea} = \frac{241}{360} \cdot 36,32 = 24,31$.
9. Koroaren azalera bi zirkuluen azaleren kendura da. Kanpo-zirkuluaren azalera $153,86$ denez, barnekoaren azalera $28,26$ izango da. Beraz, barne-erradioa: $r = \sqrt{\frac{28,26}{\pi}} = 3$.
10. Laukizuzenaren oinarria $1,6$ da, eta altuera $3,2$. Zirkuluerdiaren erradioa $0,8$ da. Perimetroa:
 $P = 1,6 + 2 \cdot 3,2 + \pi \cdot 0,8^2 = 10,51$ m eta azalera: $A = 1,6 \cdot 3,2 + \frac{\pi \cdot 0,8^2}{2} = 6,12$ m².
11. Azalera zirkuluaren azaleraren erdia izango da. Zirkuluarena $\pi \cdot 7^2 = 153,86$ cm² bada, erdia: $76,93$ cm²
Perimetroa $\pi \cdot 7 + 2 \cdot 3,5 = 43,96$ cm

AUTOEBALUAZIOAREN erantzunak

1. a. erradioa, b. zentroa, c. korda, d. zirkunferentzierdia, e. diametroa, f. arkua.
2. Kanpo-puntua da.
3. Ebakitzailerak dira.
4. Zirkunferentzia txikia handiaren barne-ukitzailea da.
5. $\frac{224^\circ}{2} = 112^\circ$
6. a. segmentua, b. koroa, c. zona, d. trapezioa, zirkuluerdia, f. sektorea.
7. Arkuaren luzera $24,29$ da.
8. Erradioa $7,30$ da.
9. Azalera $177,19$ m² da.
10. Egindako distantzia: $4\,923,89$ m.

Bidali jarduerak tutoreari ►

OHARRA: Hamabostaldi honetako ariketetan, ehunenetara biribildu da π zenbakiaren balioa. Hau da: $\pi \approx 3,14$. Kalkuluak eta emaitzak ere ehunenetara biribildu dira.