

Nombre de la Aplicación didáctica		
Conocimientos de Trigonometría		
Descripción general		
Será desarrollada con alumnos de 4º ESO.		
Aspectos didácticos		
Competencias	Competencia matemática, competencia lingüística, competencia tecnológica y competencia en autonomía e iniciativa personal	
Objetivos	<p>Conocer las razones trigonométricas del ángulo agudo</p> <p>Conocer las relaciones entre las razones trigonométricas de algunos ángulos</p> <p>Conocer la relación fundamental de la Trigonometría</p> <p>Conocer las razones trigonométricas del ángulo suma, ángulo diferencia, ángulo doble y ángulo mitad.</p>	
Contenidos	<p>Razones trigonométricas del ángulo agudo</p> <p>Relaciones entre las razones trigonométricas de algunos ángulos</p> <p>Relación fundamental de la Trigonometría</p> <p>Las razones trigonométricas del ángulo suma, ángulo diferencia, ángulo doble y ángulo mitad. (extra)</p>	
Metodología	Se pretende que los alumnos practiquen con las escenas para así poder interiorizar los distintos conceptos básicos de la Trigonometría.	
Evaluación	Si fuese posible sería interesante utilizar el Descartes 3D, ya que con esta herramienta se pueden realizar conteos de aciertos y fallos, pero no he visto ningún caso en el que eso se haga con Descartes 2; de manera que no voy a poder saber si me resulta posible evaluar con esta misma herramienta o tendré que utilizar el sistema clásico de lápiz y papel.	
Refuerzo	Habrá que observar cómo se va desarrollando en el aula y las dificultades que se van apareciendo entre los alumnos, pero lo que se podría es suprimir algunas páginas y centrarnos en las siguientes como mínimo para aquellos alumnos con más dificultades. Lo básico será conocer el concepto de seno, coseno y tangente y las relaciones entre los ángulos complementarios y suplementarios.	
Ampliación	Se preparará una página extra para los alumnos que avancen más rápidamente y que tengan claros los contenidos básicos: Las razones trigonométricas del ángulo doble y de la diferencia de dos ángulos.	
Otros		
Materiales seleccionados		
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO	4º ESO A	Miguel García Reyes
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS Y RELACIONES ENTRE ELLAS	4º ESO B	Pedro Férrez Martínez
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS. OPERACIONES. IDENTIDADES Y ECUACIONES	1º BACH CCNN o Tecnológico	Jesús Fernández Martín de los Santos
EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA	1º BACH CCNN o Tecnológico	Miguel Ángel Cabezón Ochoa

Estructura de los apartados

Didáctica En cada apartado se comenzará con una breve explicación teórica y actividades referentes a cada una de las escenas que se utilicen. No habrá texto en exceso para que resulte fácil de seguir y se destacarán las palabras importantes en otro color.

Gráfica Razones trigonométricas del ángulo agudo

Razones trigonométricas de ángulos agudos - Mozilla Firefox

Archivo Editar Ver Historial Marcadores Herramientas Ayuda

Captura de pantalla / Copia de pantalla x Página de inicio de Mozilla Firefox x Razones trigonométricas de ángulos agu... x +

recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Razones_trigonometricas_triangu... Razones trigonométricas de ángulos agudos

Más vistos Comenzar a usar Firef... boc.cantabria.es/boc... Pruebas de acceso a c...

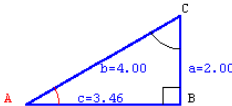
1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Las razones trigonométricas de un ángulo agudo se definen en función de los lados de ese triángulo y son independientes de su tamaño. Las razones trigonométricas **seno**, **coseno** y **tangente** del ángulo agudo de un triángulo rectángulo como el de la figura, en el que el ángulo $B=90^\circ$, b es la hipotenusa, y a y c son los catetos, se definen:

Si se aumenta el tamaño de los lados del triángulo prolongándolos y trazando rectas paralelas al lado a se obtienen triángulos semejantes al anterior y, por tanto, las razones trigonométricas del ángulo A siguen siendo las mismas, dependiendo sólo de su amplitud (en grados o en radianes). Con Descartes vamos a poder comprobar esta propiedad.

créditos zoom 40 0.x -96 0.y 96 config

$\text{sen } A = a/b = 0.50$
 $\text{cos } A = c/b = 0.86$
 $\text{tg } A = a/c = 0.57$



1.- Varía los valores de b hasta que alcance una longitud de 12.

2.- Observa cómo no varía el valor de las razones trigonométricas del ángulo de 30° que aparece en la figura. Cambia a 45° y 60° .

3.- Calcula las razones trigonométricas de los ángulos de 15° , 1 radián, 85° y 0.3 radianes.

Puesto que 3.1416 radianes aproximadamente son 180 grados un radián equivale aproximadamente a **180/3.1416** grados, cantidad que puedes introducir de modo indicado, Descartes calcula el resultado y, en este caso, lo redondea hasta los grados.

4.- Intenta construir un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5. ¿Qué valor toma el ángulo A ?

inicio ángulo A 30 hipotenusa 4.00 limpiar

Relaciones entre las razones trigonométricas de algunos ángulos

relacion_razones_trigonometricas - Mozilla Firefox

Archivo Editar Ver Historial Marcadores Herramientas Ayuda

Teorema de Tales relacion_razones_trigonometricas

recursositic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Razones_trigonometricas/Relacion_razones_trigonometricas.htm

Más visitados Comenzar a usar Firef... boc.cantabria.es/boc... Pruebas de acceso a c...

descartes 2D

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS.

Geometría

1. ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Ángulos **complementarios** son los que suman 90° . En la siguiente escena puede verse el **ángulo B** (en rojo) y el **ángulo A**, **complementario del ángulo B** (en verde).



- 1.- Modifica el valor del **ángulo A** y observa como cambia el valor de su complementario.
- 2.- ¿Con quién coincide el seno del **ángulo A**? ¿Y el coseno ?.
- 3.- Encuentra la relación entre las tangentes del **ángulo A** y del **ángulo B**.

relacion_razones_trigonometricas - Mozilla Firefox

Archivo Editar Ver Historial Marcadores Herramientas Ayuda

Teorema de Tales relacion_razones_trigonometricas

recursositic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Razones_trigonometricas/Relacion_razones_trigonometricas.htm

Más visitados Comenzar a usar Firef... boc.cantabria.es/boc... Pruebas de acceso a c...

inicio A 20.00

2. ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Ángulos **suplementarios** son los que suman 180° . En la siguiente escena puede verse con color rojo el **ángulo B** y el **ángulo A** suplementario del **ángulo B** (en verde).



- 1.- Modifica el valor del **ángulo A** y observa como cambia el valor de su suplementario.
- 2.- ¿Cómo tienen **los senos** dos ángulos suplementarios? ¿Y **los cosenos** ?.
- 3.- ¿Cómo están relacionadas **las tangentes** de dos ángulos suplementarios?.
- 4.- Si un ángulo pertenece al cuarto cuadrante, ¿a qué cuadrante pertenece **su suplementario**? ¿Y **su complementario**?

El botón **Inicio** restaura los valores iniciales.

relacion_razones_trigonometricas - Mozilla Firefox

Teorema de Tales

recursositic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Razones_trigonometricas/Relacion_razones_trigonometricas.htm

inició A 30.00

3. ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN π RADIANES.

En la siguiente escena pueden verse dos ángulos A y B que **difieren en π radianes**.

créditos zoom 100 config

Circunferencia goniométrica

$A=30^\circ = 0.52 \text{ rad}$
 $\text{sen } A = 0.49$
 $\text{cos } A = 0.86$

$B=210^\circ = 3.66 \text{ rad}$
 $\text{sen } B = -0.49$
 $\text{cos } B = -0.86$

inició A 30.00

- 1.- Modifica el valor del ángulo **A** y observa como cambia el valor de **B**.
- 2.- ¿Cómo tienen **los senos** los ángulos **A** y **B**? ¿Y los **cosenos**?
- 3.- ¿Cómo están relacionadas las **tangentes** de los ángulos **A** y **B**?

Para modificar el valor del ángulo **A** puedes presionar los pulsadores rojo y azul del control **A** o escribir el número en la celda blanca y pulsar la tecla **Intro**.

relacion_razones_trigonometricas - Mozilla Firefox

Teorema de Tales

recursositic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Razones_trigonometricas/Relacion_razones_trigonometricas.htm

inició A 30.00

4. ÁNGULOS OPUESTOS

En la siguiente escena puede verse con color rojo el ángulo **B**, **opuesto** del **A** (en verde).

créditos zoom 100 config

Circunferencia goniométrica

$A=30^\circ = 0.52 \text{ rad}$
 $\text{sen } A = 0.49$
 $\text{cos } A = 0.86$

$B=330^\circ = 5.76 \text{ rad}$
 $\text{sen } B = -0.49$
 $\text{cos } B = 0.86$

inició A 30.00

- 1.- Modifica el valor del ángulo **A** y observa como cambia el valor de su opuesto. Comprueba que $B = 2\pi - A$.
- 2.- ¿Cómo tienen **los senos** dos ángulos opuestos?. ¿Y **los cosenos**?
- 3.- ¿Cómo están relacionadas las tangentes de dos **ángulos opuestos**?



Relación fundamental de la Trigonometría

Teorema de Tales - Mozilla Firefox

Archivo Editar Ver Historial Marcadores Herramientas Ayuda

Captura de pantalla / Copia de pantalla x Teorema de Tales x +

recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/trigonometricas_triángulo_rectángulo/Ratigo2.htm

Más visitados Comenzar a usar Firef... boc.cantabria.es/boc... Pruebas de acceso a c...

1. RELACIONES ENTRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Teniendo en cuenta el triángulo de hipotenusa unidad, si aplicamos el teorema de Pitágoras, se debe cumplir la que se conoce como relación fundamental de la trigonometría:

$$\text{sen}^2 A + \text{cos}^2 A = 1$$

Esta expresión junto con la que relaciona a la tangente con el seno y el coseno de un ángulo permite calcular las restantes razones trigonométricas a partir de una de ellas:

$$\text{tg} A = \frac{\text{sen} A}{\text{cos} A}$$

créditos zoom 40 O.x -96 O.y 96 config

(sen A)^2=0.25
(cos A)^2=0.75
tg A=a/c=0.57
sen A/cos A=0.50/0.86=0.57

inicio A 30 b 4.00 limpiar

- 1.- Comprueba para diferentes valores del ángulo A que se cumplen las relaciones anteriores entre sus razones trigonométricas.
- 2.- Si el seno de un ángulo es 1/3 calcula las restantes razones trigonométricas.
- 3.- Repite la operación si el coseno de un ángulo es $\sqrt{3}/2$
- 4.- ¿Sabrías calcular el valor del seno y el coseno cuando la tangente del ángulo es 1?

Las razones trigonométricas del ángulo suma, ángulo diferencia, ángulo doble y ángulo mitad. (extra)

Título de la página - Mozilla Firefox

Archivo Editar Ver Historial Marcadores Herramientas Ayuda

Teorema de Tales x Índice_razones_trigonometricas x Título de la página x +

recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/razones_trigonometricas_bcnt/suma2.htm

Más visitados Comenzar a usar Firef... boc.cantabria.es/boc... Pruebas de acceso a c...

1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO SUMA.

En el siguiente gráfico utilizo letras griegas para nombrar los ángulos; es una notación habitual a la que debes acostumbrarte. Debemos tener presente que $OQ=1$ y que QS es perpendicular a OS . Los ángulos α y β son iguales porque sus lados son perpendiculares.

En la ilustración figuran las demostraciones de dos fórmulas muy importantes. Observa que el seno de la suma no es la suma de los senos y que el coseno de la suma tampoco es la suma de los cosenos.

$\text{sen } \beta = SQ$
 $\text{cos } \beta = OS$
 $\text{sen } (\alpha + \beta) = PQ = PT + TQ$
 $\text{sen } \alpha = RS / OS = PT / \text{cos } \beta$, luego $PT = \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta$
 $\text{cos } \alpha = TQ / SQ = TQ / \text{sen } \beta$, luego $TQ = \text{cos } \alpha \cdot \text{sen } \beta$
 Por tanto
 $\text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \beta + \text{cos } \alpha \cdot \text{sen } \beta$

Sigue con cuidado los pasos de la demostración

$\text{cos } (\alpha + \beta) = OP = OR - PR$
 $\text{cos } \alpha = OR / OS = OR / \text{cos } \beta$, luego $OR = \text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \beta$
 $\text{sen } \alpha = TS / SQ = PR / \text{sen } \beta$, luego $PR = \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$
 Por tanto
 $\text{cos } (\alpha + \beta) = \text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$

Título de la página - Mozilla Firefox

Archivo Editar Ver Historial Marcadores Herramientas Ayuda

Teorema de Tales Índice razones trigonometricas Título de la página

recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/razones_trigonometricas_bcnt/suma3.htm

Más visitados Comenzar a usar Firef... boc.cantabria.es/boc... # Pruebas de acceso a c...

Razones trigonométricas del ángulo diferencia

Si en las fórmulas de la suma cambiamos a por - b y tenemos en cuenta las relaciones entre las razones de ángulos opuestos obtendremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \operatorname{cos}(\alpha - \beta) &= \operatorname{cos} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \operatorname{tan}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tan} \alpha - \operatorname{tan} \beta}{1 + \operatorname{tan} \alpha \operatorname{tan} \beta} \end{aligned}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble

Si en las fórmulas de la suma hacemos a = b obtendremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\alpha &= 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha \\ \operatorname{cos} 2\alpha &= \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \\ \operatorname{tan} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tan} \alpha}{1 - \operatorname{tan}^2 \alpha} \end{aligned}$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

Si aplicamos la fórmula del coseno del ángulo doble al ángulo a/2 y la fórmula fundamental de la trigonometría a a/2, obtenemos dos igualdades que al sumarlas nos proporcionan otra igualdad de la que podemos despejar el coseno del ángulo mitad.

Si las restamos obtenemos una igualdad que nos permite obtener la fórmula del seno del ángulo mitad.

Y dividiendo estas últimas obtenemos la fórmula de la tangente del ángulo mitad

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{2}}$$

Estructura general

Didáctica	La página de inicio tendrá un índice, la introducción y los objetivos. Como ya he indicado anteriormente se tratará de que tenga la menor cantidad de texto posible y que sea práctico, que los alumnos manejen las escenas para poder realizar las actividades propuestas.
Gráfica	La estructura gráfica de la página de inicio será: El índice (con los hiperenlaces) al lado izquierdo y el texto con la introducción y los objetivos al lado derecho. La distribución gráfica de cada uno de los cuatro apartado se ha indicado anteriormente.