

Desarrollo de estrategias con *Descartes*

Juan G. Rivera Berrío^{1,2}, José L. Alcón Camas² y José R. Galo Sánchez²

¹Instituto Tecnológico Metropolitano, C/73 n° 76A-354 Vía al Volador, Medellín (Colombia), juanrivera@itm.edu.co

²Proyecto Descartes, ISFTIC, C/Torrelaguna, 58, 28027 Madrid

Resumen

La formación de nuestro alumnado debe contemplar situaciones en la que la resolución de problemas y su procedimiento lógico prime frente a la mera aplicación técnica o la manipulación de expresiones matemáticas. No sólo es importante la solución, la determinación, en sí, de un buen procedimiento genera el aprendizaje significativo, y esa habilidad puede fomentarse mediante la introducción de pequeñas ayudas o guías, breves pautas, que catalicen y motiven el establecimiento de esquemas lógicos, articulando tanto el razonamiento concreto como el abstracto. La búsqueda de estrategias es una parte primordial y básica en la formación en competencias. Presentamos aquí una línea de trabajo con escenas interactivas, desarrolladas con *Descartes*, que enseñan a buscar y elaborar estrategias de resolución de problemas, ubicadas en el propio contexto geométrico en el que se formulan, promoviendo a su vez la necesidad de la abstracción y el reflejo algebraico.

PALABRAS CLAVE: Resolución de problemas, Descartes, Aprendizaje significativo.

1. Introducción

¿Cuál es el área de la imagen de color negro representada en la figura 1?

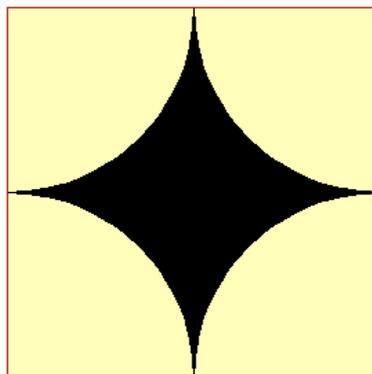


Figura 1. ¿Cuál es el área de la figura de color negro?

Una pregunta así planteada, sin más, sin ni siquiera describir el tipo de curva o expresión que la define, puede originarle un pequeño compromiso. Y si a pesar de ello, optase por dar una solución, la respuesta, posiblemente, quedaría incompleta. La razón estriba en que, usualmente, un valor o una expresión no aporta toda la información deseada, no sólo se quiere conocer la solución, sino que también se desea saber cómo se ha llegado a ella, pues el procedimiento aplicado es, en sí, lo que aporta justificación y validez a lo expresado, muestra el razonamiento lógico que lo fundamenta y a la vez que nos convence, o hace discrepar, enseña o introduce elementos para el aprendizaje.

La búsqueda de una respuesta a dicha pregunta la puede obtener, al menos, de dos formas diferentes. Una ubicando valores o incógnitas e intentado llegar a una expresión, sobre la que determinar un valor numérico, particularizando. Otra, quizás, pudo surgir del propio dibujo, de su manipulación y de la reflexión fundamentada en la maniobra que realizara. Las diferentes respuestas posibles denotan diferente tipo o forma de razonamiento lógico o matemático. Si la primera intención fue dar una expresión que condensara el área pedida, su pensamiento tiene un origen algebraico, pero si lo que hizo fue un planteamiento de descomposición o compleción con otras figuras de área más simple, el pensamiento al que recurrió tiene un origen geométrico.

Es posible que su formación superior en Matemáticas pueda llevarle a asociar la figura mostrada con la “Astroide”¹ —de ecuación paramétrica: $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ —, lo que le conduciría a introducirse en el uso de técnicas de integración para buscar una respuesta adecuada a la pregunta antes formulada, procedimientos que no dejan de ser mecánicos o repetitivos. Pero el objetivo no es promover la práctica rutinaria de una técnica o método, no; lo que se busca es promover el desencadenamiento de procesos y razonamientos que permitan la resolución de problemas, la búsqueda de respuestas justificadas, de una manera eficaz y eficiente.

Es obvio, que si se le aporta algo más de información, por ejemplo, si se le indica que observe la figura 2, quede ya ubicado en el ámbito objeto de esta comunicación. Efectivamente no era la astroide sino la zona de un cuadrado no ocupada por cuatro cuartos de círculo, es decir, el área es la del cuadrado menos la de un círculo. Y el objetivo buscado es catalizar, motivar el establecimiento de esquemas lógicos mediante el planteamiento de problemas en los que introduciendo una pequeña ayuda o guía, breves pautas, se fomente la obtención de soluciones adecuadas, articulando tanto el razonamiento concreto como el abstracto. Es decir, se busca motivar la elaboración de estrategias en la resolución de problemas.

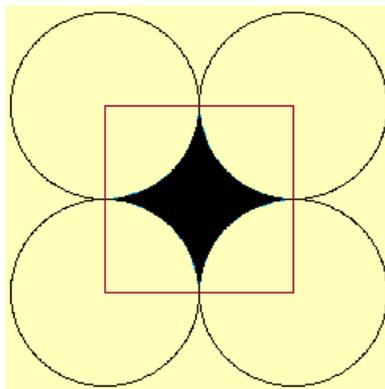


Figura 2. Motivación de una estrategia ubicando el problema en su contexto geométrico.

La formación matemática, a nivel de secundaria, ha sido objeto de múltiples avatares. Uno de ellos ha sido la introducción de una alta componente algebraica, un interés centrado en poder inculcar la abstracción, y a partir de la generalización abordar la resolución de problemas como una aplicación o concreción de lo abstraído. El primer objetivo era abstraer y posteriormente concretar. Pero es

¹ La *astroide* es un caso particular de hipocicloide. Escenas interactivas sobre las cicloides, epicicloides e hipocicloides pueden consultarse en http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/cicloides/cicloides.htm.

posible que en ese proceso se pierda el desarrollo y práctica de la intuición y de la creatividad, de la localización de caminos eficaces, es decir, se obvie o aminore el aprendizaje de estrategias plausibles y eficientes. Los Números —la Aritmética— y la Geometría son las abstracciones más cercanas a nuestro mundo físico y consecuentemente, quizás, manteniéndonos en ese contexto sea posible abordar y alcanzar una adecuada formación competencial, implementando actividades que fomenten la búsqueda de estrategias de resolución que sean intrínsecas a dichos ámbitos y no ajenas a ellos. Y una vez asimilado este proceso lógico, y como consecuencia de él, posiblemente se aborde de manera más natural la generalización.

Y en el ámbito o contexto geométrico podemos observar que el pensamiento de nuestros estudiantes, y no sólo de ellos, suele ser deficiente en la visualización espacial, presentando dificultades para observar objetos en el espacio tridimensional y por tanto para comprender conceptos matemáticos, científicos, en ese ámbito. El pensamiento espacial es un elemento básico en el pensamiento científico y humanista, en tanto nuestro mundo no es plano. Científicos, ingenieros, arquitectos, escultores, pintores, son pensadores espaciales que han logrado sus aptitudes gracias al esfuerzo en el desarrollo cognitivo en este área. Desde ese punto de vista la relación espacial se ha considerado como un elemento de la inteligencia o como un tipo de inteligencia. No obstante, generalmente, no hay un trabajo directo para fomentar esta inteligencia, o por promover o crear habilidades de pensamiento espacial. Vivimos en un mundo tridimensional y sin embargo la capacidad y formación geométrica suele asentarse en un mundo plano.

En este contexto buscamos desarrollar en esta comunicación algunas líneas de actuación ejemplificadas o concretadas mediante el trabajo con algunas unidades didácticas interactivas. La intención es “abrir los ojos” para que la mente aborde adecuadas observaciones geométricas y a partir de ellas desarrolle estrategias de resolución eficientes. Por ejemplo, la descomposición geométrica de figuras en otras más sencillas, o su ubicación en un contexto mayor que lo contenga, pero que sea más simple, son pautas de razonamiento en las que la Geometría “abstrae al Álgebra” y simplifica el aparato matemático necesario, se simplifica el cálculo. Y el posicionamiento adecuado ante un objeto tridimensional o la percepción reflexiva de la ordenación lógica de sus elementos, su ubicación y relación, también requiere de una práctica y aprendizaje.

Las unidades didácticas que hemos señalado, como medio de trabajo o recurso didáctico, están compuestas por páginas web que integran escenas interactivas desarrolladas con el “núcleo interactivo para programas educativos”, o *nippe*, denominado Descartes (Proyecto Descartes 1998). Sobre estas escenas el alumnado puede interactuar y recabar información, de manera que el cambio que realiza sobre determinados parámetros textuales o numéricos, o el desplazamiento que efectúa del ratón hace que la imagen cambie y aporte nuevos datos o perspectivas ampliando la base de decisión, de reflexión y de elaboración de esa táctica resolutoria que se busca fomentar. Adicionalmente, en estas escenas, se incorporan elementos aleatorios (pseudoaleatorios) que hace que una misma escena pueda ser reutilizada por el mismo alumno o alumna para la adquisición de la competencia buscada, pues presenta una actividad con igual dificultad y objetivo competencial, pero con diferente apariencia, lo que introduce al alumnado en un ámbito de continua reflexión y motivación, incentivando ese aprendizaje significativo, ya que provoca la extracción del concepto implícito existente independientemente de la instancia presentada en cada momento. Ello se complementa con la evaluación de las respuestas aportadas por los usuarios, evaluación no sólo correctora, sumativa, sino que muchas veces busca ser orientadora y formativa.

En concreto, acudimos a cuatro unidades didácticas, publicadas en la web Descartes (<http://descartes.cnice.mec.es>), que nos permiten mostrar el potencial formativo de los recursos de este proyecto en los objetivos ya señalados. Mediante una adecuada observación, un adecuado análisis y una adecuada estrategia pueden fomentarse un óptimo aprendizaje competencial. En estas unidades la inclusión de manera natural de situaciones cotidianas ayuda y conduce, posiblemente, a experimentar que “lo complicado puede descomponerse en partes sencillas”, verificando no sólo lo afirmado por el adagio popular que da respuesta a la pregunta “¿Cómo comerse un elefante?... a trocitos”, si no enseñando a identificar y ubicar cada uno de esos trozos en el todo geométrico que compone y configura ese elefante.

2. Relaciones espaciales

Los currículos de matemáticas, generalmente, se han centrado en los números, sus operaciones, en las habilidades y destrezas para operar algebricamente, y si comparamos el tiempo dedicado al estudio de la geometría plana frente a la geometría espacial, observaremos que el pensamiento espacial sigue siendo deficitario. Sin embargo el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) de la OCDE (2006, pág. 87) advierte:

“Es importante no restringir el concepto de forma al de unas entidades estáticas. La forma, como entidad, puede transformarse, del mismo modo que las formas se modifican. En ocasiones, este tipo de cambios pueden visualizarse con gran elegancia mediante tecnologías informáticas. Los alumnos deberán ser capaces de identificar pautas y regularidades en el cambio de las formas.”

Un ejemplo de ello podemos verlo en las figuras 3 a 7. En ellas, para poder aportar una respuesta a cada una de las preguntas planteadas, se hacen necesarias construcciones mentales de imágenes. La diversidad de respuestas evidencia el déficit en este tipo de pensamiento espacial. No obstante, cada uno tiene la capacidad de construir sus representaciones, erradas o no.

En la unidad didáctica titulada “Relaciones espaciales (vistas)” accesible en la dirección web:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/vistas/vistas_intro.htm

no se tiene como objetivo realizar un estudio pormenorizado sobre los conceptos de volúmenes o proyecciones, sino iniciar el interés en la elaboración de conjeturas sobre la visualización espacial². La abstracción comienza en lo visual y lo manejable.

Cuando en la escena que se refleja en la figura 3, preguntamos por “el número que corresponde a la cara lateral derecha”, solicitamos una suposición, un manejo mental de la forma en el espacio. Sería incompleto si no pudiésemos refrendar nuestra intuición con la realidad, y es por ello que también aquí el estudiante debe participar³ dejando el ratón pulsado sobre la figura y moviendo ésta según crea. Este control directo sobre la representación gráfica, su manejo, permite observar las diferentes

² Existen varios términos para referirse a la aptitud espacial, usaremos indistintamente “visualización espacial” y “relación espacial”, entendidas como la habilidad para generar una representación o imagen mental de un objeto, realizar movimientos con dicha imagen y construir otra representación. Véase (Arrieta, 2006, pág. 105) y Carroll (1993, pág. 306); este último distingue: relaciones espaciales (rotación mental como factor predominante), orientación espacial (perspectiva y rotación) y visualización (conteo de bloques por ejemplo).

³ Como se ha indicado las escenas de Descartes son interactivas, es decir, que el usuario puede cambiar algún parámetro o la posición de algún control gráfico (por ejemplo con el ratón) y observar cambios acordes con la acción efectuada.

vistas. Adecúa la mente y capacita en la visión espacial, manipulando conceptos como perspectiva y ubicación espacial.

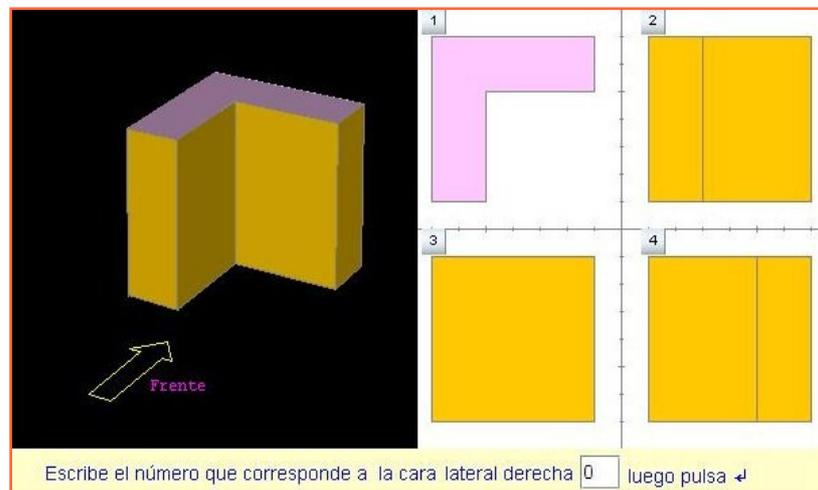


Figura 3. Ejercicio **E**lemental

El aprendizaje va progresivamente graduando su dificultad (ver figuras 4 y 5), estableciendo como reto el saber si la “visualización espacial” ha arrojado el resultado adecuado y, consecuentemente, medir la aptitud espacial⁴. La escena se introduce en la línea de la evaluación formativa mediante una animación en la que se muestra como se obtiene la proyección por la que se ha preguntado.

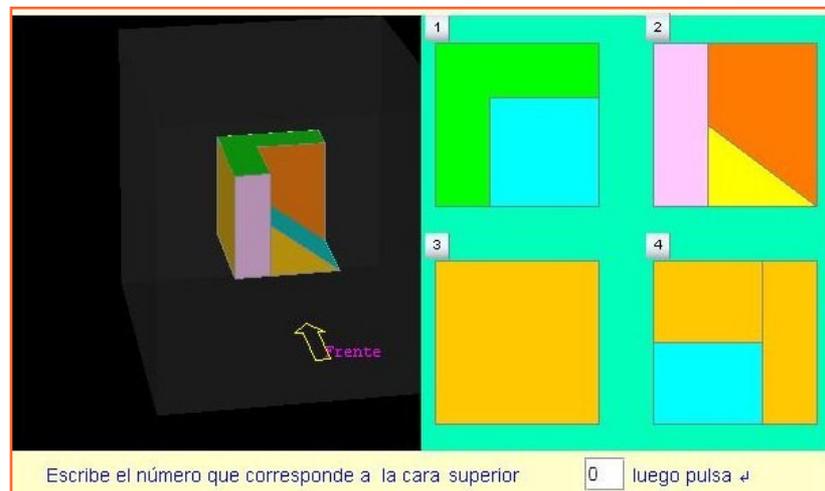


Figura 4. Ejercicio animado 1

⁴ Desde el punto de vista cognitivo, la relación espacial se ha considerado como un elemento de la inteligencia (Arrieta, 2006, pág. 104; Tversky, 2004; Eliot, 2000) o como un tipo de inteligencia, denominada espacial (Eliot, 2000).

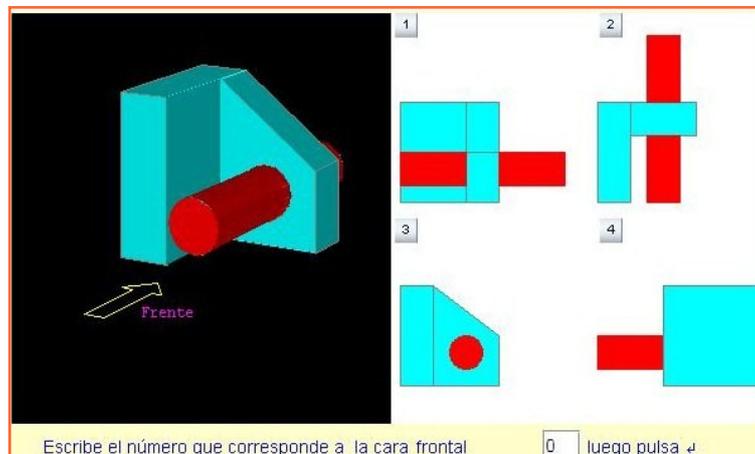


Figura 5. Ejercicio animado 2

Y gracias a la aleatoriedad incorporada en cada ejercicio se generan tipos de problemas que contemplan dificultades análogas y por consiguiente permiten un aprendizaje óptimo y la construcción de la estrategia adecuada.

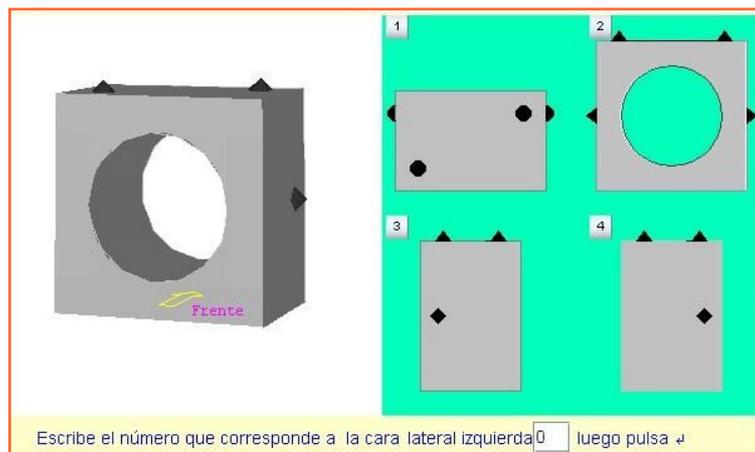


Figura 6. Ejercicio remaches

Así pues, con esta muestra, podemos observar cómo se trabaja la aptitud espacial, manipulando e incluyendo el control de perspectivas de un objeto, no incidiendo a priori en los conceptos de proyecciones, sino a posteriori. Se evita recurrir al esquema tradicional de establecer las definiciones de proyecciones y perspectiva, y se aborda su construcción significativa a través de la experimentación y ejercitación sobre las figuras. Competencialmente se trabajan el reconocimiento de formas, patrones y posiciones relativas, la orientación espacial, y con los cambios introducidos dinámicamente se construyen estas competencias a través de una reflexión lógica y argumental. Nuestros estudiantes obtienen un significado físico de los conceptos, expresándolo con un vocabulario propio cercano al científico. Conseguimos además provocar la iniciativa, la curiosidad por descubrir y comprobar sus versiones de respuestas, utilizamos el razonamiento para suponer y descartar posibles soluciones.

3. Matematización en las relaciones espaciales

En esta sección asociada a la unidad didáctica que puede consultarse en la dirección:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/relaciones_espaciales/relaciones_intro.htm

abordamos el desarrollo de la aptitud espacial *versus* la matemática o la relación matemática en las relaciones espaciales. Trabajamos formas y patrones, relaciones, razonamiento lógico y conceptos matemáticos que van progresivamente adquiriendo significado dentro del vocabulario y bagaje competencial de nuestros estudiantes. El nivel de dificultad aumenta, propiciando en nuestro alumnado la necesidad de un entrenamiento mayor y un compromiso para explorar nuevas estrategias de resolución.

En esta parte se busca cultivar habilidades en la identificación de un objeto 3D, a través de sus vistas. Las habilidades matemáticas comienzan con la observación y representación del mundo real. Cuando percibimos un objeto realizamos varias operaciones mentales. En éstas intervienen los conceptos previos que tenemos del mundo y nuestras habilidades para realizar relaciones entre lo percibido y nuestra forma de percibir. Lo cierto es que existen diferentes formas de percibir, unas más lentas y otras más rápidas. E igualmente, podemos establecer relaciones mentales diferentes.

Como ejemplo podemos tener la actividad “Relacionando lo semejante” (ver figura 7). Un reto abarcable con los pulsadores y con la versatilidad de movimiento sobre las figuras que permite la herramienta Descartes, y que de otra forma, sería de difícil ejecución.

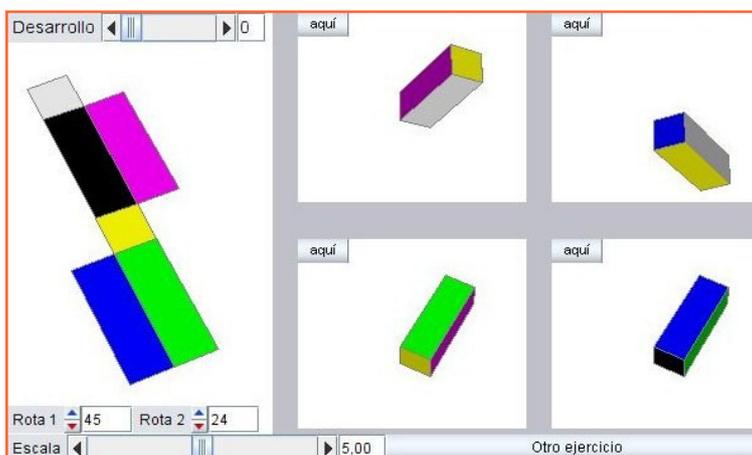


Figura 7. Relacionando lo semejante.

Pero también podemos utilizar de forma distinta nuestros conceptos en la resolución de problemas (ver figuras 8 y 9). Las herramientas matemáticas que empleamos son conocidas por los estudiantes, no hay operaciones de cálculo complicadas, sólo buscamos introducir de manera natural el concepto de volumen, como aptitud innata de visualización espacial. Por ello es posible que unos usen el conteo y otros el cálculo.



Figura 8. Las cajas del contenedor

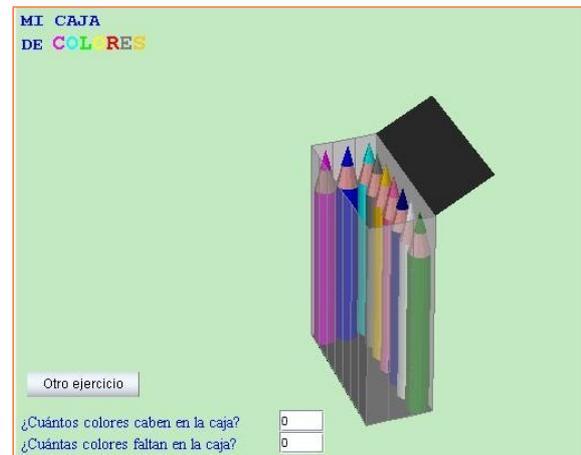
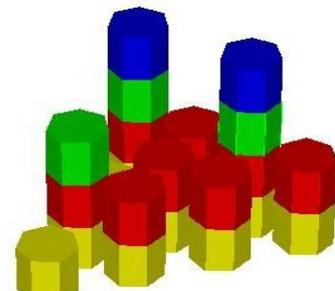


Figura 9. Mi caja de colores

Y si en la primera parte hicimos participe a nuestro alumnado de la necesidad de visualizar la forma espacial, la estrategia de observar desde otros puntos de vista hasta conseguir la clave resolutoria del ejercicio, aquí comenzamos con otros tipo de actividades que van introduciendo una matematización de los espacios (ver figura 10). Reglas básicas como la suma, la resta o el puro conteo es un camino para solucionar los ejercicios propuestos. Sin embargo, se presentan ejercicios con una clave implícita que permite establecer un “tren de alta velocidad” para su resolución.

RELACIONES ESPACIALES - CONTANDO COLORES



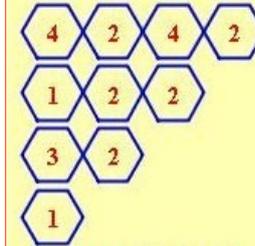
¿Cuántos prismas hay en la figura?

Este ejercicio puedes resolverlo de dos formas:

1. Contar directamente, uno a uno, los prismas de la figura.
2. hallar el mecanismo o clave que agilice dicho conteo

Intenta averiguar la clave, sino pulsa el botón clave como ayuda

Otro ejercicio
Clave



TOTAL DE PRISMAS = 23

¡CADA COLOR TIENE ASOCIADO UN NÚMERO!

Figura 10. Ejercicio: Contando colores

Las relaciones no sólo son numéricas, la simetría y la posición relativa son conceptos interesantes que despiertan también el intelecto y que han de introducirse como parte de la estrategia para la resolución de problemas. Estrategia de simetría mezclada con el cálculo (ver figura 11). Una mente despierta encuentra una invitación a predecir el número de tubos, y en cualquier caso se despierta a la mente. O se fuerza a ello (figura 12) mediante la relación volumétrica necesaria para la construcción y posicionamiento estratégico de sólidos conducente a la obtención del todo a partir de sus partes.

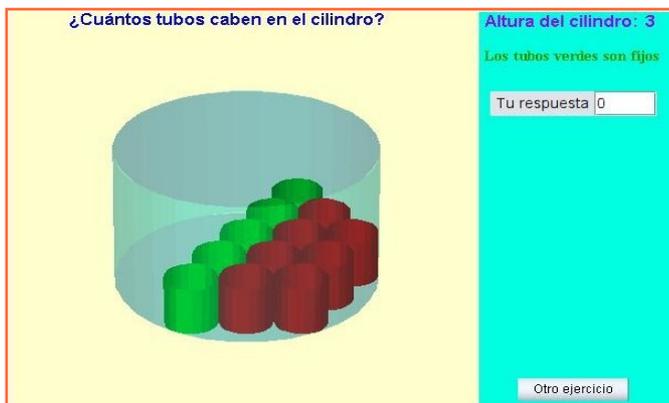


Figura 11. Ejercicio: Acomodando tubos

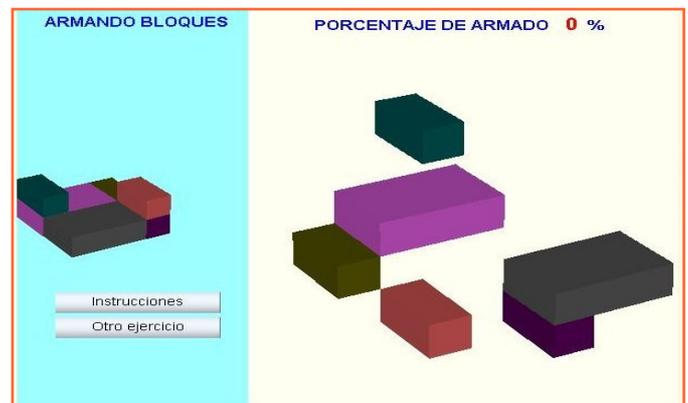


Figura 12. Ejercicio: Armandos bloques

Llegado a este punto debemos significar la herramienta utilizada, pues es difícil en un contexto plano y unidireccional, en un soporte estático como es el texto de esta comunicación (salvo que disponga de este documento en un contexto que le permita acceder a algún hipervínculo e interactuar con los materiales descritos), mostrar la bondad de la interactividad intrínseca, de la relación bidireccional que caracteriza a los recursos descritos. Reiteradamente hablamos de manipular figuras, espacios, volúmenes, ver otras perspectivas, hacer conjeturas y promover la búsqueda de estrategias y todo esto es posible gracias a una herramienta que nos permite mostrar representaciones eficientes de la realidad, abordar simulaciones fáciles de lograr en este contexto y sin embargo, muchas veces, evitadas en un ambiente docente tradicional por la necesaria introducción de manipulación manual con papel u otros materiales. La figura 13, es un ejemplo de ello. En este tipo de ejercicios se permite rotar y girar la figura tridimensional, movimiento que puede realizarse bien a través de parámetros numéricos, bien con pulsadores que permiten incrementos automáticos o bien desplazando el ratón sobre la figura. El objetivo es determinar el color de una de las caras del cubo pero identificándola en su desarrollo plano.

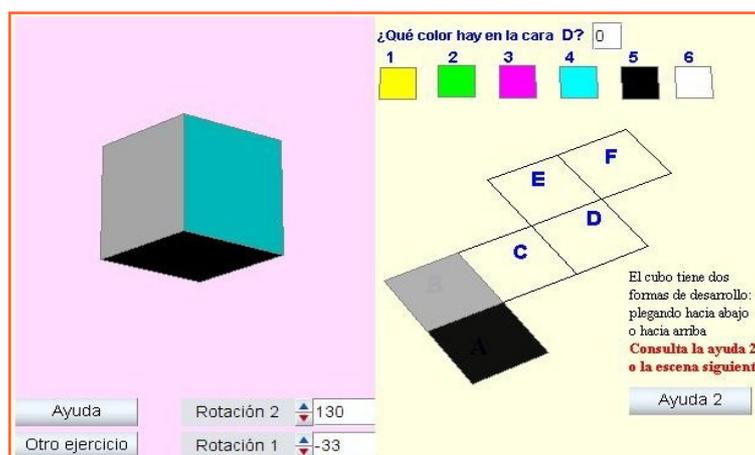


Figura 13. Ejercicio: Ubicando colores

La respuesta del usuario es evaluada automáticamente y en un contexto formativo el trabajo de manipulación mental que habrá realizado, en el que posiblemente incluso haya abordado el desarrollo de ese cubo de manera virtual, queda mostrado mediante una animación que puede

controlar haciendo avanzar o detener el proceso según sus necesidades o según demande su aprendizaje (ver figura 14). Todo esto es posible gracias a la herramienta informática: el nippe Descartes. Y quizás gracias a ella tal vez se encuentre en una productiva discusión dado que la respuesta no es única, depende de su percepción y experiencia⁵.

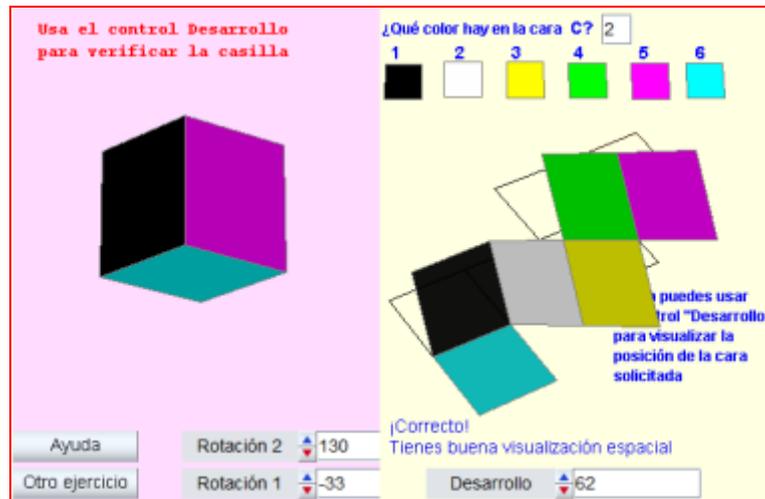


Figura 14. Construcción animada del cubo representado a partir de su desarrollo plano.

La facilidad y versatilidad de la herramienta Descartes permite centrarse en el objetivo educativo, un aprendizaje funcional, ejercitado y centrado sobre las competencias básicas. El tiempo invertido se ubica y dedica en la comprensión de los conceptos matemáticos que están inmersos en el ejercicio propuesto, así como en la búsqueda de las estrategias de resolución.

4. Estrategias geométricas pre-algebraicas

El cálculo de áreas de figuras geométricas se hace atractivo cuando se requiere determinar el área de una región no básica, es decir, regiones cuya forma no se corresponde con figuras elementales o usuales en el aprendizaje básico como cuadriláteros, triángulos, círculos y polígonos regulares en general. En la unidad didáctica interactiva denominada “regiones sombreadas” y accesible en la dirección:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/areas_regiones_sombreadas/areas_intro.htm

se presentan algunas regiones planas y se plantea como objetivo el cálculo de su área. Este se plantea como objetivo aparente, pero el objetivo real se centra en la búsqueda de estrategias de resolución, o siendo más precisos en tratar de provocar un estímulo que lleve a la conformación mental necesaria para que se generen los enlaces lógicos plausibles que conduzcan a una resolución óptima, elegante. Se desea potenciar la producción de esas estrategias que, más que establecer un

⁵ Este tipo de ejercicio evidencia la posibilidad de múltiples representaciones a partir de un mismo objeto. Wittgenstein (1953, pág. 200) ilustra un ejemplo sencillo a partir de la observación de un triángulo, que podría verse o interpretarse como un agujero triangular, o un dibujo geométrico apoyado en la base o colgado de una punta; como una montaña, como una cuña, como medio paralelogramo, etc. Parecen existir patrones o especies de reglas que nuestra mente fija en el transcurso de nuestra vida. Estos patrones también contribuyen a que tengamos varias representaciones de un mismo objeto o evento percibido. No se trata de algoritmos estáticos, son procesos que se enriquecen y cambian con nuestra experiencia y, aún más, con la mediación de recursos informáticos como Descartes.

aprendizaje basado en una reproducción de técnicas, fomente la creatividad. Pero para la consecución de este objetivo, a veces, es necesario algo de empuje o leve intervencionismo y por ello se aportan sugerencias, ayudas, guías que permiten mostrar un posible camino a quien no encuentra o renuncia a ejercitar su propia táctica. El objetivo se centra en *cómo se resuelve*.

En general son figuras estéticamente atractivas (ver algunas reflejadas en la figura 15) o al menos curiosas, que aparentemente pueden entrañar complejidad, y según el esquema mental personal quizás puedan realmente tenerla, pero con una buena estrategia pueden quedar simplificadas, desprovistas de tal apariencia engañosa y ubicadas en su trivial realidad.

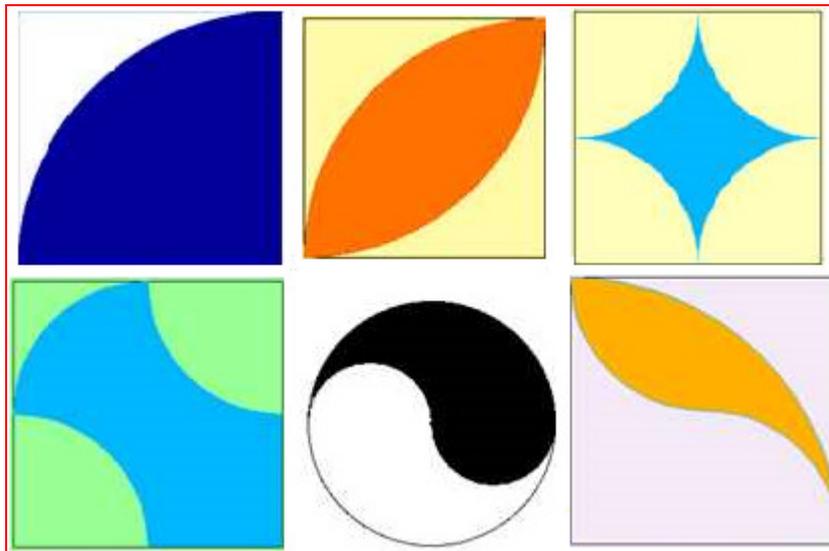


Figura 15. Algunas regiones para determinar su área.

Pueden presentarse como elementos simples o compuestos (ver figura 16), proporcionando ejemplos en los que la reducción de un problema a otro conocido puede ser el camino adecuado, o bien puede verse que, contrariamente a lo esperado, esta estrategia puede no ser la óptima. También podemos tener regiones mixtas que combinan diferentes elementos básicos (figura 17).

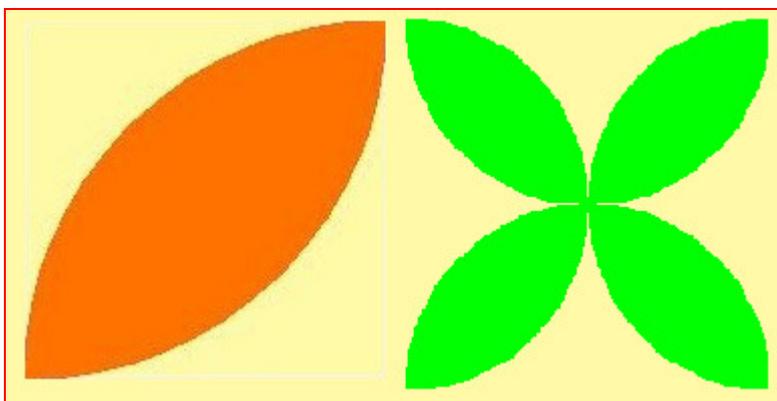


Figura 16. Regiones simples o compuestas.

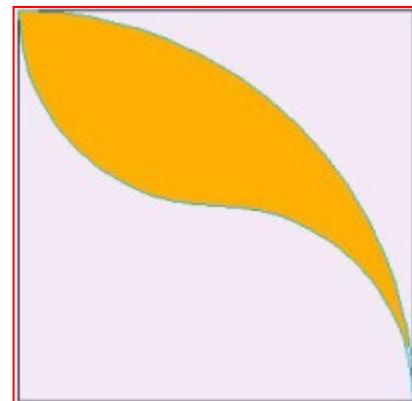


Figura 17. Regiones mixtas

O, entre otras posibilidades, pueden efectuarse planteamientos o estrategias de complementariedad, mediante situaciones en los que la resolución directa puede entrañar más dificultad. Por ejemplo, en la figura 19 si se pregunta por la región de color azul (las aspas del molino), quizás sea más factible plantearse el cálculo de la región blanca (la cruz).

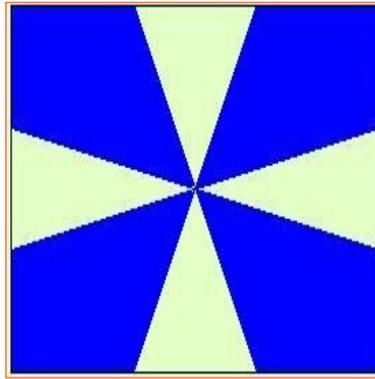


Figura 19. Las aspas versus la cruz

5. Álgebra a través de la Geometría

Planteados algunos mecanismos que pueden posibilitar el desarrollo de estrategias en la resolución de problemas, nos ubicamos finalmente, en esta comunicación, en la aplicación o traslación a un contexto algebraico, el paso de lo local a lo global, de lo particular a lo general, de la concreción a la abstracción.

Como referencia tomamos la unidad didáctica cuya dirección de consulta es:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Aplicacion_de_polinomios/index.htm.

Aprovechando las destrezas practicadas y asimiladas a lo largo del camino que hemos recorrido, hacemos un planteamiento de introducción del Álgebra sobre la base geométrica desarrollada. Este plan aporta al alumnado una visión concreta de la necesidad del cálculo algebraico, de la necesidad o ventaja de simplificar y reducir expresiones, a la vez que aporta ejemplificaciones del significado del valor de una expresión algebraica. El Álgebra surge de manera natural, y se avanza progresivamente en su uso, utilizando desde figuras básicas realizadas como composiciones de figuras con igual forma, por ejemplo cuadrados que sirven para crear marcos (figura 20), o mezcla de ellas (figura 21), a modelizaciones de objetos usuales como un libro (figura 22) o situaciones de nuestro entorno cotidiano como un cruce de calles (figura 23).

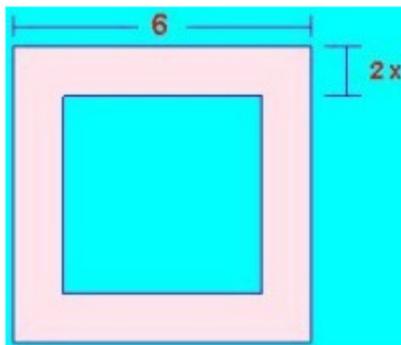


Figura 20. Marcos cuadrados

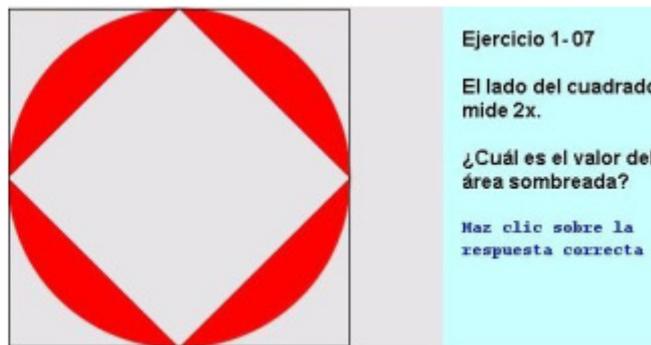


Figura 21. Redondeando el cuadrado

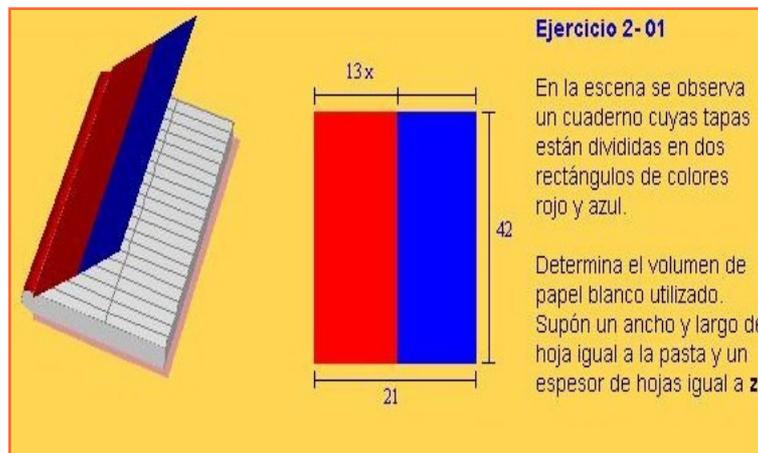


Figura 22. Ejercicio: Libro



Figura 23. "Descruce" de calles

Y, si lo deseamos, podemos indagar sobre el volumen de nuestra habitación (figura 24), es decir, acercarnos a ejemplos próximos aplicables a una realidad, realidad difícil que necesita de modelos para trasladar o ubicar cierta concreción (figura 25). La posibilidad de diseñar representaciones que "emulen" un objeto de la realidad es cada vez mayor. La implementación de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación permiten hoy la construcción de escenarios virtuales que transmiten mayores flujos de información del objeto a nuestros estudiantes: los simuladores de vuelo, los simuladores de carreras, el cine 3D, las aplicaciones virtuales para las ciencias básicas (física, química, biología) y los video juegos evidencian un mayor acercamiento a la realidad desde la representación. Se generan emociones que antes eran imposibles con los recursos utilizados para construir las representaciones tradicionales. En este contexto educativo, se justifica la herramienta Descartes, como mediador entre la realidad y las representaciones que nosotros como docentes exponemos a nuestro alumnado.

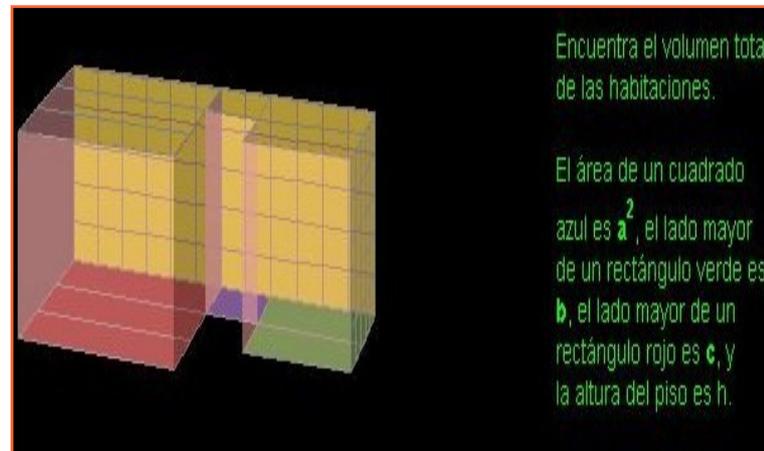


Figura 24. Ejercicio: El constructor chiflado

Y con ello hemos ido desarrollando una línea de trabajo que nos ha llevado a expresiones algebraicas que tienen un significado y explicación geométrica, una utilidad. La x surge con un sentido en el alumnado, ahora no podrán argumentar efusivamente lo contrario.



Figura 25. Ejercicio: El coliseo

6. Conclusiones

De lo expuesto en esta comunicación podemos apuntar algunas conclusiones que pueden observarse en los procesos de enseñanza y aprendizaje:

- Los recursos de la Red permiten un trabajo diferenciado al habitual. El alumnado puede, y es deseable, convertirse en protagonista de su aprendizaje, y el profesor actuar como guía y promotor del mismo, canalizando hacia una adecuada formación competencial. “Enseñar a aprender”, “aprender a aprender” y “aprender a enseñar”.

- La interactividad, aleatoriedad, corrección automática y la evaluación tanto sumativa como formativa que aportan las escenas permiten promover el aprendizaje significativo, bien autónomo o colaborativo.
- La deficitaria formación en visualización espacial se puede superar con el uso de mediadores virtuales como el proyecto Descartes, permitiendo diseñar mejores representaciones que capturen propiedades difíciles de presentar en dos dimensiones. Las representaciones planas generan un pensamiento plano de la realidad, generando hábitos que dificultan una mejor interpretación de los objetos de nuestro entorno.
- Las pautas y guías orientadoras que se incluyen en las escenas, las actividades programadas y secuenciadas, introducen al alumnado en el objeto principal de este trabajo, el desarrollo de estrategias para abordar de manera óptima y elegante la resolución de problemas.
- La línea de aprendizaje relativa a la introducción del álgebra, a partir de la aplicación de estrategias geométricas, se presenta como un camino lógico y eficaz para el alumnado, pues su uso surge de manera natural, así como la necesidad de la manipulación de los términos algebraicos para su simplificación.

Consideramos que Descartes contribuye al aprendizaje y desarrollo de estrategias para la resolución de problemas.

7. Bibliografía

- Arrieta, M. (2006). La capacidad espacial en la educación matemática: Estructura y medida. *Educación matemática*, 18 (1), 99-132.
- Carroll, J. B. (1993). *Human cognitive abilities: A Survey of Factor-analytic Studies*. Cambridge University Press.
- Eliot, J. (2000). *The Nature and Measurement of Spatial Intelligence*. University of Maryland.
- Galo, J.R. (2008). Aprendizaje continuo con Descartes en el aula. *I Congreso de Internet en el aula*. Granada. http://descartes.cnice.mec.es/heda/difusion/materiales/ia08/Jose_R_Galo.pdf
<http://www.congresointernetenelaula.es/virtual/?q=node/629&id=212&congreso=presencial%E7>
- Galo, J., y Cañas, J. (2006). Análisis de una experimentación constructivista con TIC en el aprendizaje de las matemáticas. *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Huesca.
- OCDE. (2006). PISA 2006: Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. <http://www.pisa.oecd.org/>
- Proyecto Descartes (1998). [Web del proyecto](#). ISFTIC. Ministerio de Educación, Política Social y Deporte. Madrid. <http://descartes.cnice.mec.es/>
- Tversky, B. (2004). *Visuo-spatial reasoning*. The Cambridge handbook of thinking and reasoning (págs. 209-240).
- Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations*. Oxford: Basil Blackwell Ltd.